Allgemeine 13-Momenten-Näherung zur Fokker-Planck-Gleichung eines Plasmas

FRIEDRICH HERTWECK

Institut für Plasmaphysik GmbH., Garching bei München

(Z. Naturforschg. **20 a**, 1243—1255 [1965]; eingegangen am 6. Mai 1965)

For the FOKKER-PLANCK-equation for a plasma the system of moment equations is derived. The highest order moments considered are the components of the heat flux. For these the condition must be satisfied that they are small compared with $(5/2)\, p \sqrt{p/\varrho_e}$. All moments of lower order, especially the difference velocity of electrons and ions (i.e. the electrical current) and the anisotropy of pressure are arbitrary in this approximation.

Das Ziel dieser Arbeit ist, aus der BOLTZMANN-Gleichung für ein Zwei-Komponenten-Plasma das zugehörige System der Momentengleichungen herzuleiten, und zwar unter Verwendung der FOKKER–PLANCK-Näherung für das Stoßintegral. Diese Näherung ist gültig unter der Voraussetzung, daß sich innerhalb einer DEBYE-Kugel sehr viele Teilchen befinden, was in praktisch interessierenden Fällen meistens zutrifft.

Die Theorie der Momentengleichungen ist zuerst von GRAD behandelt worden, jedoch ohne Einbeziehung geladener Teilchen. KOLODNER hat für den Fall kleiner Abweichungen vom thermischen Gleichgewicht die Theorie der Momentengleichungen auf ein Plasma angewandt (Lineare Näherung für das Stoßintegral).

In der vorliegenden Arbeit werden die Momentengleichungen für das Plasma abgeleitet, wobei die Diffusionsgeschwindigkeit (d. h. die Differenz der mittleren Geschwindigkeiten der einzelnen Komponenten) und die Druckanisotropie beliebig sein sollen. Letztere Verallgemeinerung bedingt eine Entwicklung der Geschwindigkeitsverteilung $f(\boldsymbol{w})$ nach Orthogonalpolynomen über einer Gewichtsfunktion vom Typ

$$g(\boldsymbol{w}) = \exp[-\alpha_1 w_1{}^2 - \alpha_2 w_2{}^2 - \alpha_3 w_3{}^2]\,,$$

wobei $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ positive, voneinander unabhängige Konstanten sind (Abschnitt 3). Die Stoßintegrale lassen sich dann durch die Lösungen der Potentialgleichungen

$$\Delta\varphi(\boldsymbol{w}) = -4\pi\, g(\boldsymbol{w}) \quad \text{und} \quad \Delta\Delta\psi(\boldsymbol{w}) = -8\pi\, g(\boldsymbol{w})$$

ausdrücken. Diese Lösungen kann man auf Einfach-Integrale zurückführen.

Es wird hier die von GRAD diskutierte 13-Momenten-Näherung benutzt, in welcher jede Gaskomponente beschrieben wird durch partielle Differentialgleichungen in Ort und Zeit für die Dichte ϱ, die mittlere Geschwindigkeit der Komponente $\boldsymbol{v} = \{v_1, v_2, v_3\}$, den Drucktensor $p_{\alpha\beta}$ und den Wärmestrom s_α. Eine wesentliche Einschränkung ist dabei die Voraussetzung, daß die auftretenden Wärmeströme s_α klein sind, d. h.

$$|s_\alpha| \ll \tfrac{5}{2}\, p \sqrt{p/\varrho_e}\,.$$

Wenn die Differenz der mittleren Geschwindigkeiten der einzelnen Komponenten beliebig sein soll, darf man nicht die übliche Definition der thermischen Energie einer Komponente (bezogen auf die Massengeschwindigkeit des Gesamtsystems) benutzen, sondern muß die mittlere Geschwindigkeit dieser Komponente als Referenzgeschwindigkeit nehmen.

1. Die Momentengleichungen

In diesem Abschnitt soll die Herleitung der Momentengleichungen kurz skizziert werden [1].

Die BOLTZMANN-Gleichung für ein aus geladenen Teilchen der Sorten r bestehendes Gas lautet (mit Benutzung der Summationskonvention):

$$\frac{\partial f^{(\mathrm{r})}}{\partial t} + u_\mu^{(\mathrm{r})} \frac{\partial f^{(\mathrm{r})}}{\partial x_\mu} + [\varepsilon_\mu^{(\mathrm{r})}(\boldsymbol{x},t) + \omega_{\mu\nu}^{(\mathrm{r})}(\boldsymbol{x},t) \cdot u_\nu^{(\mathrm{r})}] \frac{\partial f^{(\mathrm{r})}}{\partial u_\mu^{(\mathrm{r})}} = \left(\frac{\partial f^{(\mathrm{r})}}{\partial t}\right)_{\mathrm{st}}. \tag{1}$$

Es bedeuten hier: t die Zeit, $\boldsymbol{x}$ den Ortsvektor mit den Komponenten x_μ, $u_\mu^{(\mathrm{r})}$ die Geschwindigkeitskomponenten eines Teilchens der Sorte r im Laborsystem,

$$\varepsilon_\mu^{(\mathrm{r})}(\boldsymbol{x},t) = (e^{(\mathrm{r})}/m^{(\mathrm{r})})\, E_\mu(\boldsymbol{x},t)$$

die durch ein elektrisches Feld $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t)$ auf ein Teil-

[1] Vgl. z. B. S. CHAPMAN u. T. G. COWLING, Mathematical Theory of Non-Uniform Gases, Cambridge University Press, Cambridge 1953, S. 322 ff.

chen der Sorte r mit der Masse $m^{(r)}$ und der Ladung $e^{(r)}$ ausgeübte Beschleunigung und

$$\omega_{\mu\nu}^{(r)}(\boldsymbol{x}, t) = e^{(r)} B_{\mu\nu}(\boldsymbol{x}, t) / m^{(r)} c$$

die Gyrofrequenz für die Teilchensorte r. $\varepsilon_\mu^{(r)}$ und $\omega_{\mu\nu}^{(r)}$ können, wie angedeutet, von Ort und Zeit abhängen. $f^{(r)}(\boldsymbol{u}^{(r)}, \boldsymbol{x}, t)$ ist die Verteilungsfunktion der Teilchensorte r. Der Term auf der rechten Seite von Gl. (1), $(\partial f^{(r)}/\partial t)_{\text{st}}$, beschreibt die zeitliche Änderung der Verteilungsfunktion durch Stöße. $E_\mu(\boldsymbol{x}, t)$ und $B_{\mu\nu}(\boldsymbol{x}, t)$ enthalten außer den äußeren Feldern auch noch „innere", welche durch Ladungstrennung und elektrische Ströme innerhalb des Gases hervorgerufen werden. Die Frage der Berechnung dieser inneren Felder soll in dieser Arbeit nicht angeschnitten werden. Es seien also $E_\mu(\boldsymbol{x}, t)$ und $B_{\mu\nu}(\boldsymbol{x}, t)$ die am Ort $\boldsymbol{x}$ zur Zeit t herrschenden Felder, wie auch immer sie zustande gekommen sein mögen.

Man definiert die Momente der Funktion $f^{(r)}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{x}, t)$ wie folgt

$$\begin{aligned}
n^{(r)}(\boldsymbol{x}, t) &= \int f^{(r)}(\boldsymbol{u}^{(r)}, \boldsymbol{x}, t)\, d\boldsymbol{u}^{(r)}, \\
n^{(r)} v_\alpha^{(r)}(\boldsymbol{x}, t) &= \int u_\alpha^{(r)} f^{(r)}(\boldsymbol{u}^{(r)}, \boldsymbol{x}, t)\, d\boldsymbol{u}^{(r)}, \qquad (2) \\
p_{\alpha\beta}^{(r)}(\boldsymbol{x}, t) &= m^{(r)} \int w_\alpha^{(r)} w_\beta^{(r)} f^{(r)}(\boldsymbol{u}^{(r)}, \boldsymbol{x}, t)\, d\boldsymbol{u}^{(r)}, \\
q_{\alpha\beta\gamma}^{(r)}(\boldsymbol{x}, t) &= m^{(r)} \int w_\alpha^{(r)} w_\beta^{(r)} w_\gamma^{(r)} f^{(r)}(\boldsymbol{u}^{(r)}, \boldsymbol{x}, t)\, d\boldsymbol{u}^{(r)}, \\
q_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_N}^{*(r)} &= m^{(r)} \int w_{\alpha_1}^{(r)} w_{\alpha_2}^{(r)} \ldots w_{\alpha_N}^{(r)} f^{(r)}(\boldsymbol{u}^{(r)}, \boldsymbol{x}, t)\, d\boldsymbol{u}^{(r)},
\end{aligned}$$

wobei $\quad w_\alpha^{(r)} = u_\alpha^{(r)} - v_\alpha^{(r)}(\boldsymbol{x}, t).$

Diese Momente haben folgende physikalische Bedeutung: $n^{(r)}(\boldsymbol{x}, t)$ ist die Teilchendichte der Gaskomponente r im Ortsraum und $v_\alpha^{(r)}(\boldsymbol{x}, t)$ ist die mittlere Geschwindigkeit der Teilchensorte r. $w_\alpha^{(r)}$ nennen wir Pekuliargeschwindigkeit. Das Moment zweiter Ordnung $p_{\alpha\beta}^{(r)}$ ist der Drucktensor, das Moment dritter Ordnung $q_{\alpha\beta\gamma}^{(r)}$ der Drucktransporttensor der Teilchensorte r. Kontrahiert man den Drucktransporttensor, so erhält man die Vektorkomponenten des Wärmestroms $s_\alpha^{(r)} = \frac{1}{2} q_{\alpha\mu\mu}^{(r)}$. Für die höheren Momente lassen sich keine anschaulichen Interpretationen angeben. Die Momente sind offenbar (in allen Indizes) symmetrische Tensoren.

Die Momentengleichungen erhält man nun, indem man Gl. (1) mit den Funktionen

$$1,\ u_\alpha^{(r)},\ m^{(r)} w_\alpha^{(r)} w_\beta^{(r)}, \ldots$$

multipliziert und über den Geschwindigkeitsraum integriert. Setzt man über die Funktion $f^{(r)}(\boldsymbol{u}^{(r)}, \boldsymbol{x}, t)$ voraus, daß die Integration über den Geschwindigkeitsraum vertauschbar ist mit den Differentiationen nach Ort und Zeit und daß $f(\boldsymbol{u})$ hinreichend schnell verschwindet für $|\boldsymbol{u}| \to \infty$, so folgt durch Integration von Gl. (1) die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial n^{(r)}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\mu}(n^{(r)} v_\mu^{(r)}) = 0.$$

Das Integral über den Stoßterm verschwindet, wenn bei Stößen die Teilchenzahl erhalten bleibt. Dies soll vorausgesetzt werden, d. h. Ionisationsprozesse u. ä. werden nicht betrachtet.

Multipliziert man Gl. (1) mit $u_\alpha^{(r)}$ und integriert dann, so erhält man die Bewegungsgleichung

$$\frac{\partial v_\alpha^{(r)}}{\partial t} + v_\mu^{(r)} \frac{\partial v_\alpha^{(r)}}{\partial x_\mu} + \frac{1}{\varrho^{(r)}} \frac{\partial p_{\alpha\mu}^{(r)}}{\partial x_\mu} - \varepsilon_\alpha^{(r)} - \omega_{\alpha\nu}^{(r)} v_\nu^{(r)} = \frac{1}{n^{(r)}} \int w_\alpha^{(r)} \left(\frac{\partial f^{(r)}}{\partial t}\right)_{\text{st}} d\boldsymbol{u}^{(r)}.$$

Das Integral über den Stoßterm liefert hier einen Beitrag, nämlich den Impulsaustausch der Komponente r mit den anderen Komponenten. Der Anteil, der von den Stößen mit gleichartigen Teilchen herrührt, muß natürlich verschwinden. Auch bei den Momenten höherer Ordnung verschwinden die Integrale über $(\partial f/\partial t)_{\text{st}}$ nicht. Es soll deshalb das „Stoßmoment" definiert werden durch die Gleichung

$$\mathfrak{S}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_N}^{(r)}(\boldsymbol{x}, t) = m^{(r)} \int w_{\alpha_1}^{(r)} w_{\alpha_2}^{(r)} \ldots w_{\alpha_N}^{(r)} \left(\frac{\partial f^{(r)}}{\partial t}\right)_{\text{st}} d\boldsymbol{u}^{(r)}. \qquad (3)$$

Damit ergibt sich dann für die Momentengleichung zweiter und dritter Ordnung:

$$\frac{\partial p_{\alpha\beta}}{\partial t} + v_\mu \frac{\partial p_{\alpha\beta}}{\partial x_\mu} + \frac{\partial q_{\alpha\beta\mu}}{\partial x_\mu} + \frac{\partial v_\mu}{\partial x_\mu} p_{\alpha\beta} + \left[\frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\mu} p_{\beta\mu} - \omega_{\alpha\mu} p_{\mu\beta}\right] + [\beta, \alpha] = \mathfrak{S}_{\alpha\beta} \qquad (4)$$

und

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial q_{\alpha\beta\gamma}}{\partial t} + v_\mu \frac{\partial q_{\alpha\beta\gamma}}{\partial x_\mu} + \frac{\partial q^*_{\alpha\beta\gamma\mu}}{\partial x_\mu} + \frac{\partial v_\mu}{\partial x_\mu} q_{\alpha\beta\gamma} \qquad (5) \\
&+ \left[\frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\mu} q_{\mu\beta\gamma} - \omega_{\alpha\mu} q_{\mu\beta\gamma} + \frac{1}{\varrho} \mathfrak{S}_\alpha p_{\beta\gamma} - \frac{1}{\varrho} \frac{\partial p_{\alpha\mu}}{\partial x_\mu} p_{\beta\gamma}\right] + [\beta(\gamma, \alpha)] + [\gamma(\alpha, \beta)] = \mathfrak{S}_{\alpha\beta\gamma}.
\end{aligned}$$

$q^*_{\alpha\beta\gamma\mu}$ ist das Moment vierter Ordnung und $\varrho = m\, n(\boldsymbol{x}\, t,)$. $[\beta, \alpha]$ bzw. $[\beta(\alpha, \gamma)]$ bezeichnet den Ausdruck, der aus der ersten eckigen Klammer durch Permutation der Indizes entsteht; α und γ treten in $[\beta(\alpha, \gamma)]$ symmetrisch auf.

Für die allgemeine Momentengleichung N-ter Ordnung erhält man

$$\frac{\partial q_\alpha^{(N)}}{\partial t}+v_\mu \frac{\partial q_\alpha^{(N)}}{\partial x_\mu}+\frac{\partial q_{\mu\alpha}^{(N+1)}}{\partial x_\mu}+\frac{\partial v_\mu}{\partial x_\mu} q_\alpha^{(N)} +\sum_{k=1}^{N}\left[\left(\frac{\partial v_{\alpha_k}}{\partial x_\mu}-\omega_{\alpha_k\mu}\right)\cdot q^{(N)}_{\alpha_1\ldots\alpha_{k-1}\alpha_{k+1}\ldots\alpha_N\mu}+\frac{p^{(N-1)}_{\alpha_1\ldots\alpha_{k-1}\alpha_{k+1}\ldots\alpha_N}}{\varrho}\left(\mathfrak{S}^{(1)}_{\alpha_k}-\frac{\partial p^{(2)}_{\alpha_k\mu}}{\partial x_\mu}\right)\right]=\mathfrak{S}^{(N)}_\alpha .$$

Der Teilchensorten-Index ist in den letzten Gleichungen weggelassen. Das Moment N-ter Ordnung ist durch $q_\alpha^{(N)}$ abgekürzt. Der obere, eingeklammerte Index bezeichnet die Ordnung des Momentes, während α für die N verschiedenen Indizes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k, \ldots, \alpha_N$ steht. Diese Indizes sind bei der Summation über k als verschieden zu betrachten, auch wenn sie zufällig numerisch gleich sind. So ist z. B. für $N=3$:

$$\sum_{k=1}^{3}\omega_{\alpha_k\mu}\, q^{(3)}_{\mu\alpha}=\omega_{\alpha\mu}\, q_{\mu\beta\gamma}+\omega_{\beta\mu}\, q_{\mu\alpha\gamma}+\omega_{\gamma\mu}\, q_{\mu\alpha\beta} .$$

Ist $\alpha=\beta=\gamma=1$, so erhält man $3\,\omega_{1\mu}\, q_{\mu 11}$.

Das Auftreten von $\mathfrak{S}_\alpha^{(1)}$ und $p_{\alpha\mu}^{(2)}$ in dieser Gleichung, in der sonst nur die Momente der Ordnung $(N-1)$, N und $(N+1)$ vorkommen, rührt her von der Substitution der Bewegungsgleichung in diese Gleichung.

Man erhält ein abzählbar unendliches System von Momentengleichungen, welches an die Stelle der BOLTZMANN-Gleichung tritt. In der Praxis muß man dieses System irgendwie abbrechen. Diese Frage wird in Abschnitt 3 diskutiert.

In dieser Arbeit wird im folgenden ein Zwei-Komponenten-System mit einfach geladenen Ionen und Elektronen untersucht werden. Um die Teilchensorten-Indizes i und e nach Möglichkeit zu eliminieren, sollen folgende Abkürzungen benutzt werden:

$$\begin{aligned}
m^{(e)} &= m_e, & m^{(i)} &= m_i,\\
\varrho^{(e)} &= \varrho_e, & \varrho^{(i)} &= \varrho_i,\\
n^{(e)} &= n, & n^{(i)} &= N,\\
p^{(e)}_{\alpha\beta} &= p_{\alpha\beta}, & p^{(i)}_{\alpha\beta} &= P_{\alpha\beta},\\
q^{(e)}_{\alpha\beta\gamma} &= q_{\alpha\beta\gamma}, & q^{(i)}_{\alpha\beta\gamma} &= Q_{\alpha\beta\gamma},\\
\varepsilon^{(e)}_{\alpha} &= -\varepsilon_\alpha, & \varepsilon^{(i)}_{\alpha} &= (m_e/m_i)\ \varepsilon_\alpha=E_\alpha,\\
\omega^{(e)}_{\alpha\nu} &= -\omega_{\alpha\nu}, & \omega^{(i)}_{\alpha\nu} &= (m_e/m_i)\ \omega_{\alpha\nu}=\Omega_{\alpha\nu} .
\end{aligned}$$

An Stelle der Geschwindigkeiten v_α und V_α kann man die neuen Geschwindigkeiten d_α und U_α einführen:

$$d_\alpha=V_\alpha-v_\alpha \quad \text{(Diffusionsgeschwindigkeit)},$$

$$U_\alpha=(m_e\, v_\alpha+m_i\, V_\alpha)/(m_e+m_i) \quad \text{(Massengeschwindigkeit)}.$$

Wenn $n=N$, ist die Diffusionsgeschwindigkeit d_α proportional zum elektrischen Strom j_α. Sonst gilt bei einfach geladenen Ionen

$$j_\alpha=e\, n\, d_\alpha+(N-n)\cdot[U_\alpha+d_\alpha\, m_e/(m_i-m_e)] .$$

Substituiert man v_α und V_α in den Bewegungsgleichungen durch d_α und U_α, so erhält man die Bewegungs- und die Diffusionsgleichung:

$$\frac{\partial U_\alpha}{\partial t}+U_\mu\frac{\partial U_\alpha}{\partial x_\mu}+\frac{m_e\, m_i}{m_0^2}d_\mu\frac{\partial d_\alpha}{\partial x_\mu}+\frac{1}{\varrho_0}\frac{\partial}{\partial x_\mu}(p_{\alpha\mu}+P_{\alpha\mu})-\frac{m_i}{m_0}\Omega_{\alpha\nu}\, d_\nu=0 ,$$

$$\frac{\partial d_\alpha}{\partial t}+U_\mu\frac{\partial d_\alpha}{\partial x_\mu}+d_\mu\frac{\partial U_\alpha}{\partial x_\mu}-\frac{m_i-m_e}{m_0}d_\mu\frac{\partial d_\alpha}{\partial d_\mu}-\frac{m_0}{m_i}(\varepsilon_\alpha+\omega_{\alpha\nu}\, U_\nu)+\frac{m_i-m_e}{m_i}\omega_{\alpha\nu}\, d_\nu +\left(\frac{1}{\varrho_i}\frac{\partial P_{\alpha\mu}}{\partial x_\mu}-\frac{1}{\varrho_e}\frac{\partial p_{\alpha\mu}}{\partial x_\mu}\right)=-\frac{m_0}{m_i\,\varrho_e}\mathfrak{S}^{(e)}_\alpha ;$$

hierbei ist $m_0=m_e+m_i$.

Setzt man in diesen Gleichungen für die Drucke $p_{\alpha\beta}=p\,\delta_{\alpha\beta}$ und $P_{\alpha\beta}=P\,\delta_{\alpha\beta}$ und in der Diffusionsgleichung die rechte Seite gleich $-d_\alpha/\tau_{st}$, wo $1/\tau_{st}$ die Stoßfrequenz der Elektronen bedeutet, so erhält man die von SCHLÜTER[2] aufgestellten Plasmagleichungen.

2. Allgemeine Form der Stoßmomente

In diesem Abschnitt stellen wir uns die Aufgabe, die allgemeine Form der Stoßmomente für das Zwei-Komponenten-Plasma zu finden, wobei wir den von ROSENBLUTH, McDONALD und JUDD[3] abgeleiteten Aus-

[2] A. SCHHLÜTER, Z. Naturforschg. **5 a**, 72 [1950].

[3] M. N. ROSENBLUTH, W. M. McDONALD u. D. L. JUDD, Phys. Rev. **107**, 1 [1957].

druck für $(\partial f^{(r)}/\partial t)_{st}$ zugrunde legen. Diese Autoren betrachten den Fall eines Plasmas, bei dem innerhalb des DEBYEschen Abschirmradius viele Teilchen vorhanden sind. Unter der Annahme, daß eine Testpartikel nur Stöße mit Teilchen innerhalb der DEBYE-Kugel erleidet, wobei es jeweils im Mittel nur sehr kleine Ablenkungen erfährt, kann man die in der FOKKER–PLANCK-Gleichung auftretenden Ausdrücke $\langle \Delta u_\alpha \rangle$ und $\langle \Delta u_\alpha \Delta u_\beta \rangle$ (d. h. die mittlere zeitliche Änderung der Geschwindigkeit und des dyadischen Produktes der Geschwindigkeit der Testpartikel) berechnen und erhält für die Elektronenkomponente

$$\frac{1}{\Gamma_e}\left(\frac{\partial f^{(e)}}{\partial t}\right)_{st} = -2\frac{\partial}{\partial u_\mu^{(e)}}\left[f^{(e)}(\boldsymbol{u}^{(e)})\frac{\partial h^{(e)}(\boldsymbol{u}^{(e)})}{\partial u_\mu^{(e)}}\right] + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial u_\mu^{(e)}\partial u_\nu^{(e)}}\left[f^{(e)}(\boldsymbol{u}^{(e)})\frac{\partial^2 g^{(e)}(\boldsymbol{u}^{(e)})}{\partial u_\mu^{(e)}\partial u_\nu^{(e)}}\right]$$
$$-\left(1+\frac{m_e}{m_i}\right)\frac{\partial}{\partial u_\mu^{(e)}}\left[f^{(e)}(\boldsymbol{u}^{(e)})\frac{\partial h^{(i)}(\boldsymbol{u}^{(e)})}{\partial u_\mu^{(e)}}\right] + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial u_\mu^{(e)}\partial u_\nu^{(e)}}\left[f^{(e)}(\boldsymbol{u}^{(e)})\frac{\partial^2 g^{(i)}(\boldsymbol{u}^{(e)})}{\partial u_\mu^{(e)}\partial u_\nu^{(e)}}\right], \tag{1}$$

wobei $$h^{(r)}(\boldsymbol{u}) = \int \frac{f^{(r)}(\boldsymbol{u}')\,d\boldsymbol{u}'}{|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}'|}, \qquad g^{(r)}(\boldsymbol{u}) = \int |\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}'|\, f^{(r)}(\boldsymbol{u}')\,d\boldsymbol{u}'.$$

Ferner ist $$\Gamma_r = 4\pi e^4 \ln \Lambda/(m^{(r)})^2 = \Gamma_0/(m^{(r)})^2,$$

wobei $\ln\Lambda \gg 1$ angenommen wird. $\Lambda = h_D/p_{\pi/2} = 1{,}24\cdot 10^4\cdot (T_e^3/n_e)^{1/2}$ ist das Verhältnis von DEBYE-Radius $h_D = [k\,T/(4\pi n e^2)]^{1/2} = 6{,}9\cdot (T/n)^{1/2}$ zum Stoßparameter $p_{\pi/2} = e^2/(3\,k\,T)$ für $(\pi/2)$-Ablenkung. Numerische Werte finden sich z. B. bei SPITZER [4].

Da dieser Wert für den DEBYE-Radius h_D nur gilt, wenn kein Magnetfeld vorhanden ist, muß man für die Gültigkeit der FOKKER–PLANCK-Gleichung bei Anwesenheit von Magnetfeldern zunächst annehmen, daß $h_D \ll r_{gyro}$, wo r_{gyro} den Gyrations-Radius der Elektronen bedeutet. Man erhält mit $r_{gyro} = m_e v_\perp c/(e B)$, wenn man $v_\perp = (2\,k\,T_e/m_e)^{1/2}$ setzt,

$$h_D/r_{gyro} = B/[c(8\pi n_e m_e)^{1/2}] = 220\,B/n_e^{1/2}.$$

Von P. SCHRAM (mündl. Mitteilung) ist gezeigt worden, daß die FOKKER–PLANCK-Koeffizienten auch noch für $h_D \approx r_{gyro}$ gelten und daß man für $h_D > r_{gyro}$ statt h_D die Größe r_{gyro} zum Abschneiden der divergenten Integrale verwenden kann.

Da hier nur der Spezialfall eines Zwei-Komponenten-Systems mit Ionen und Elektronen betrachtet wird, treten in Gl. (1) nur zwei Verteilungsfunktionen, $f^{(i)}(\boldsymbol{u}^{(i)}, \boldsymbol{x}, t)$ und $f^{(e)}(\boldsymbol{u}^{(e)}, \boldsymbol{x}, t)$ auf. (Die Abhängigkeit von Ort und Zeit wird nicht immer explizit angegeben.) Wir führen die Pekuliargeschwindigkeiten $\boldsymbol{w}$ und $\boldsymbol{W}$ ein und schreiben ohne Einschränkung der Allgemeinheit

$$f^{(i)}(\boldsymbol{u}^{(i)}, \boldsymbol{x}, t) = F(\boldsymbol{W}, \boldsymbol{x}, t), \qquad f^{(e)}(\boldsymbol{u}^{(e)}, \boldsymbol{x}, t) = f(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{x}, t). \tag{2}$$

Damit folgt für das Stoßglied der Elektronen-Komponente

$$\frac{1}{\Gamma_e}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{st} = -2\frac{\partial}{\partial w_\mu}\left[f(\boldsymbol{w})\frac{\partial h(\boldsymbol{w})}{\partial w_\mu}\right] + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial w_\mu \partial w_\nu}\left[f(\boldsymbol{w})\frac{\partial^2 g(\boldsymbol{w})}{\partial w_\mu \partial w_\nu}\right]$$
$$+\left(1+\frac{m_e}{m_i}\right)\frac{\partial}{\partial w_\mu}\left[f(\boldsymbol{w})\frac{\partial H(\boldsymbol{w}-\boldsymbol{d})}{\partial d_\mu}\right] + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial w_\mu \partial w_\nu}\left[f(\boldsymbol{w})\frac{\partial^2 G(\boldsymbol{w}-\boldsymbol{d})}{\partial d_\mu \partial d_\nu}\right]. \tag{3}$$

Für die Ionen-Komponente erhält man

$$\frac{1}{\Gamma_i}\left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)_{st} = -2\frac{\partial}{\partial W_\mu}\left(F(\boldsymbol{W}\frac{\partial H(\boldsymbol{W})}{\partial W_\mu}\right] + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial W_\mu \partial W_\nu}\left[F(\boldsymbol{W})\frac{\partial^2 G(\boldsymbol{W})}{\partial W_\mu \partial W_\nu}\right]$$
$$-\left(1+\frac{m_i}{m_e}\right)\frac{\partial}{\partial W_\mu}\left[F(\boldsymbol{W})\frac{\partial h(\boldsymbol{W}+\boldsymbol{d})}{\partial d_\mu}\right] + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial W_\mu \partial W_\nu}\left[F(\boldsymbol{W})\frac{\partial^2 g(\boldsymbol{W}+\boldsymbol{d})}{\partial d_\mu \partial d_\nu}\right]. \tag{4}$$

In den beiden letzten Gleichungen ist

$$h(\boldsymbol{w}) = \int \frac{f(\boldsymbol{w}')}{|\boldsymbol{w}-\boldsymbol{w}'|}\,d\boldsymbol{w}', \qquad H(\boldsymbol{W}) = \int \frac{F(\boldsymbol{W}')}{|\boldsymbol{W}-\boldsymbol{W}'|}\,d\boldsymbol{W}',$$
$$g(\boldsymbol{w}) = \int |\boldsymbol{w}-\boldsymbol{w}'|\, f(\boldsymbol{w}')\,d\boldsymbol{w}', \qquad G(\boldsymbol{W}) = \int |\boldsymbol{W}-\boldsymbol{W}'|\, F(\boldsymbol{W}')\,d\boldsymbol{W}',$$

und entsprechend $h(\boldsymbol{W}+\boldsymbol{d})$, $H(\boldsymbol{w}-\boldsymbol{d})$, $g(\boldsymbol{W}+\boldsymbol{d})$ und $G(\boldsymbol{w}-\boldsymbol{d})$.

[4] L. SPITZER, Physics of Fully Ionized Gases, Interscience, New York 1956, S. 73.

Die Ableitungen nach w_μ bzw. W_μ der Funktionen, die von $\boldsymbol{w}-\boldsymbol{d}$ bzw. $\boldsymbol{W}+\boldsymbol{d}$ abhängen, sind in diesen beiden Gleichungen durch Ableitungen nach d_μ ersetzt worden. Man kann dies tun, wenn die $d_\mu \neq 0$ sind. Sind eines oder mehrere der $d_\mu = 0$, so muß man erst die Ableitungen bilden und darf erst dann diese $d_\mu = 0$ setzen. Es bedeutet dies also keine Einschränkung der Allgemeinheit.

Es sollen jetzt die Stoßmomente berechnet werden. Da in den Stoßtermen alle Größen Ableitungen nach den Geschwindigkeiten sind, folgt unmittelbar, daß das Stoßmoment nullter Ordnung verschwindet. Beim Stoßmoment erster Ordnung muß die Summe aller Terme, welche von Stößen zwischen gleichartigen Teilchen herrühren, Null ergeben. Es läßt sich leicht nachprüfen, daß dies der Fall ist. Das Stoßmoment erster Ordnung enthält also nur Terme, die die Wechselwirkung mit der anderen Komponente beschreiben. Für die Elektronenkomponente erhält man

$$\frac{1}{\Gamma_\mathrm{e}}\int w_\alpha \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{\mathrm{st}} \mathrm{d}\boldsymbol{w} = \left(1+\frac{m_\mathrm{e}}{m_\mathrm{i}}\right)\int w_\alpha \frac{\partial}{\partial w_\mu}\left[f(\boldsymbol{w})\,\frac{\partial H(\boldsymbol{w}-\boldsymbol{d})}{\partial d_\mu}\right]\mathrm{d}\boldsymbol{w} + \frac{1}{2}\int w_\alpha \frac{\partial^2}{\partial w_\mu\,\partial w_\nu}\left[f(\boldsymbol{w})\,\frac{\partial^2 G(\boldsymbol{w}-\boldsymbol{d})}{\partial d_\mu\,\partial d_\nu}\right]\mathrm{d}\boldsymbol{w}\,. \tag{5}$$

Man kann voraussetzen, daß $f(\boldsymbol{w})$ für $|\boldsymbol{w}|\to\infty$ mindestens exponentiell verschwindet. Durch partielle Integration verschwindet das zweite Integral in Gl. (5). Die Ableitung nach d_α kann man mit der Integration über $\boldsymbol{w}$ vertauschen, so daß man für das Stoßmoment erster Ordnung der Elektronenkomponente schließlich den Ausdruck

$$\mathfrak{S}_\alpha^{(\mathrm{e})} = -\Gamma_0\cdot\left(\frac{1}{m_\mathrm{i}}+\frac{1}{m_\mathrm{e}}\right)\frac{\partial}{\partial d_\alpha}\iint\frac{f(\boldsymbol{w})\;F(\boldsymbol{W})}{|\boldsymbol{w}-\boldsymbol{W}-\boldsymbol{d}|}\,\mathrm{d}\boldsymbol{w}\,\mathrm{d}\boldsymbol{W} \tag{6}$$

erhält. Im Gesamtsystem Elektronen plus Ionen darf sich der mittlere Teilchenimpuls durch Stöße nicht ändern. Es muß also die Beziehung

$$\mathfrak{S}_\alpha^{(\mathrm{e})} + \mathfrak{S}_\alpha^{(\mathrm{i})} = 0$$

gelten. Das ist auch der Fall, wie man leicht nachprüfen kann.

Das Stoßmoment zweiter Ordnung enthält auch Terme, welche die Wechselwirkung zwischen gleichartigen Teilchen beschreiben. Nach ähnlichen Umformungen wie bei der Berechnung von $\mathfrak{S}_\alpha^{(\mathrm{e})}$ erhält man für diesen Anteil (wir zerlegen $\mathfrak{S}_{\alpha\beta}^{(\mathrm{e})} = \mathfrak{S}_{\alpha\beta}^{(\mathrm{e,e})} + \mathfrak{S}_{\alpha\beta}^{(\mathrm{e,i})}$)

$$\mathfrak{S}_{\alpha\beta}^{(\mathrm{e,e})} = \frac{\Gamma_0}{m_\mathrm{e}}\iint\frac{f(\boldsymbol{w})\;f(\boldsymbol{w}')}{|\boldsymbol{w}-\boldsymbol{w}'|}\left[\delta_{\alpha\beta} - 3\,\frac{(w_\alpha-w_\alpha')\,(w_\beta-w_\beta')}{|\boldsymbol{w}-\boldsymbol{w}'|^2}\right]\mathrm{d}\boldsymbol{w}\,\mathrm{d}\boldsymbol{w}'.$$

Für die Ionen gilt eine entsprechende Formel. Die Spur $\mathfrak{S}_\alpha^{(\mathrm{e,e})}$ dieses Tensors, welche die Änderung der mittleren thermischen Energie $\frac{1}{2}\,m_\mathrm{e}\langle\boldsymbol{w}^2\rangle$ der Elektronen durch Stöße untereinander beschreibt, verschwindet, wie dies auch sein muß. Der Anteil $\mathfrak{S}_{\alpha\beta}^{(\mathrm{e,i})}$ des Stoßmomentes zweiter Ordnung der Elektronen, welcher von den Stößen mit den Ionen herrührt, ist

$$\begin{aligned}\mathfrak{S}_{\alpha\beta}^{(\mathrm{e,i})} = {} & -\Gamma_0\cdot\left(\frac{1}{m_\mathrm{e}}+\frac{1}{m_\mathrm{i}}\right)\cdot\left[\frac{\partial}{\partial d_\alpha}\int w_\beta\, f(\boldsymbol{w})\;H(\boldsymbol{w}-\boldsymbol{d})\;\mathrm{d}\boldsymbol{w} + \frac{\partial}{\partial d_\beta}\int w_\alpha\, f(\boldsymbol{w})\;H(\boldsymbol{w}-\boldsymbol{d})\;\mathrm{d}\boldsymbol{w}\right]\\ & + \frac{\Gamma_0}{m_\mathrm{e}}\,\frac{\partial^2}{\partial d_\alpha\,\partial d_\beta}\int f(\boldsymbol{w})\;G(\boldsymbol{w}-\boldsymbol{d})\;\mathrm{d}\boldsymbol{w}\,.\end{aligned}$$

Ganz analoge Formeln gelten für $\mathfrak{S}_{\alpha\beta}^{(\mathrm{i,i})}$ und $\mathfrak{S}_{\alpha\beta}^{(\mathrm{i,e})}$. Die Ausdrücke für die Stoßmomente dritter Ordnung werden etwas länger; wir wollen sie an dieser Stelle nicht explizit angeben.

Es ist zweckmäßig, für die in den Stoßmomenten auftretenden Integrale folgende Abkürzungen einzuführen

$$\varphi_{\alpha\beta\ldots} = \iint w_\alpha\, w_\beta \ldots \frac{f(\boldsymbol{w})\;f(\boldsymbol{w}')}{|\boldsymbol{w}-\boldsymbol{w}'|}\,\mathrm{d}\boldsymbol{w}\,\mathrm{d}\boldsymbol{w}',\qquad \vartheta_{\alpha\beta\ldots}^{\gamma\delta} = \iint w_\alpha\, w_\beta \ldots \frac{(w_\gamma-w_\gamma')\,(w_\delta-w_\delta')}{|\boldsymbol{w}-\boldsymbol{w}'|^3}\,f(\boldsymbol{w})\;f(\boldsymbol{w}')\;\mathrm{d}\boldsymbol{w}\,\mathrm{d}\boldsymbol{w}' \tag{7}$$

und entsprechend für die Ionenkomponente $\Phi_{\alpha\beta\ldots}$ und $\Theta_{\alpha\beta\ldots}^{\gamma\delta}$. Ferner sei

$$\chi_{\alpha\beta\ldots}^{\gamma\delta\ldots}(\boldsymbol{d}) = \iint w_\alpha\, w_\beta \ldots W_\gamma\, W_\delta \ldots \frac{f(\boldsymbol{w})\;F(\boldsymbol{W})}{|\boldsymbol{w}-\boldsymbol{W}-\boldsymbol{d}|}\,\mathrm{d}\boldsymbol{w}\,\mathrm{d}\boldsymbol{W} \tag{8}$$

und $$\psi^{\gamma\delta\ldots}_{\alpha\beta\ldots}(\boldsymbol{d}) = \iint w_\alpha w_\beta \ldots W_\gamma W_\delta \ldots |\boldsymbol{w}-\boldsymbol{W}-\boldsymbol{d}|\, f(\boldsymbol{w})\, F(\boldsymbol{W})\, \mathrm{d}\boldsymbol{w}\, \mathrm{d}\boldsymbol{W}. \tag{9}$$

Beachtet man, daß
$$\int f(\boldsymbol{w})\, H(\boldsymbol{w}-\boldsymbol{d})\, \mathrm{d}\boldsymbol{w} = \int F(\boldsymbol{W})\, h(\boldsymbol{W}+\boldsymbol{d})\, \mathrm{d}\boldsymbol{W}$$
und
$$\int f(\boldsymbol{w})\, G(\boldsymbol{w}-\boldsymbol{d})\, \mathrm{d}\boldsymbol{w} = \int F(\boldsymbol{W})\, g(\boldsymbol{W}+\boldsymbol{d})\, \mathrm{d}\boldsymbol{W}$$
ist, so erhält man für die Stoßmomente folgende Formeln:

$$\mathfrak{S}^{(e)}_{\alpha} = -\Gamma_0 \cdot \left(\frac{1}{m_e}+\frac{1}{m_i}\right)\frac{\partial}{\partial d_\alpha}\chi(\boldsymbol{d}), \qquad \mathfrak{S}^{(i)}_{\alpha} = -\mathfrak{S}^{(e)}_{\alpha}, \tag{10 a), (10 b}$$

$$\mathfrak{S}^{(e)}_{\alpha\beta} = \frac{\Gamma_0}{m_e}\left\{\varphi\,\delta_{\alpha\beta} - 3\,\vartheta^{\alpha\beta} + \frac{\partial^2\psi}{\partial d_\alpha\,\partial d_\beta} - \left(1+\frac{m_e}{m_i}\right)\left(\frac{\partial\chi_\beta}{\partial d_\alpha}+\frac{\partial\chi_\alpha}{\partial d_\beta}\right)\right\}, \tag{10 c}$$

$$\mathfrak{S}^{(i)}_{\alpha\beta} = \frac{\Gamma_0}{m_i}\left\{\Phi\,\delta_{\alpha\beta} - 3\,\Theta^{\alpha\beta} + \frac{\partial^2\psi}{\partial d_\alpha\,\partial d_\beta} + \left(1+\frac{m_i}{m_e}\right)\left(\frac{\partial\chi^\beta}{\partial d_\alpha}+\frac{\partial\chi^\alpha}{\partial d_\beta}\right)\right\}, \tag{10 d}$$

$$\mathfrak{S}^{(e)}_{\alpha\beta\gamma} = \frac{\Gamma_0}{m_e}\left\{\left[\varphi_\alpha\,\delta_{\beta\gamma} - 3\,\vartheta^{\beta\gamma}_{\alpha} + \frac{\partial^2\psi_\alpha}{\partial d_\beta\,\partial d_\gamma} - \left(1+\frac{m_e}{m_i}\right)\frac{\partial\chi_{\beta\gamma}}{\partial d_\alpha}\right] + [\beta(\alpha,\gamma)] + [\gamma(\alpha,\beta)]\right\}, \tag{10 e}$$

$$\mathfrak{S}^{(i)}_{\alpha\beta\gamma} = \frac{\Gamma_0}{m_i}\left\{\left[\Phi_\alpha\,\delta_{\beta\gamma} - 3\,\Theta^{\beta\gamma}_{\alpha} + \frac{\partial^2\psi^\alpha}{\partial d_\beta\,\partial d_\gamma} + \left(1+\frac{m_i}{m_e}\right)\frac{\partial\chi^{\beta\gamma}}{\partial d_\alpha}\right] + [\beta(\alpha,\gamma)] + [\gamma(\alpha,\beta)]\right\}. \tag{10 f}$$

$[\beta(\alpha,\gamma)]$ bezeichnet den Ausdruck, den man erhält, wenn man in der ersten eckigen Klammer die Indizes permutiert, wobei statt β,γ die Indizes α,γ symmetrisch auftreten.

Bildet man die Spuren der beiden Tensoren $\mathfrak{S}^{(e)}_{\alpha\beta}$ und $\mathfrak{S}^{(i)}_{\alpha\beta}$, so folgt:

$$\mathfrak{S}^{(e)}_{\alpha\alpha} = \frac{\Gamma_0}{m_e}\left\{\frac{\partial^2\psi}{\partial d_\alpha\,\partial d_\alpha} - 2\left(1+\frac{m_e}{m_i}\right)\frac{\partial\chi_\alpha}{\partial d_\alpha}\right\} \quad \text{und} \quad \mathfrak{S}^{(i)}_{\alpha\alpha} = \frac{\Gamma_0}{m_i}\left\{\frac{\partial^2\psi}{\partial d_\alpha\,\partial d_\alpha} + 2\left(1+\frac{m_i}{m_e}\right)\frac{\partial\chi^\alpha}{\partial d_\alpha}\right\}. \tag{11), (12}$$

Wendet man den LAPLACE-Operator $\partial^2/(\partial d_\alpha\,\partial d_\alpha)$ auf $\psi(\boldsymbol{d})$ an, so erhält man 2χ, wie man mit Hilfe der Gl. (9) leicht sieht. Ferner läßt sich die Differenz $(\partial\chi^\alpha/\partial d_\alpha) - (\partial\chi_\alpha/\partial d_\alpha)$ auf folgende Weise ausdrücken:

$$\frac{\partial\chi^\alpha}{\partial d_\alpha} - \frac{\partial\chi_\alpha}{\partial d_\alpha} = \frac{\partial}{\partial d_\alpha}\int \frac{(W_\alpha - w_\alpha + d_\alpha) - d_\alpha}{|\boldsymbol{W}-\boldsymbol{w}+\boldsymbol{d}|} f(\boldsymbol{w})\, F(\boldsymbol{W})\, \mathrm{d}\boldsymbol{w}\, \mathrm{d}\boldsymbol{W} = -\chi - d_\alpha\frac{\partial\chi}{\partial d_\alpha}. \tag{13}$$

Setzt man dies in die Summe der Gln. (11) und (12) ein, so folgt:

$$\tfrac{1}{2}\,\mathfrak{S}^{(i)}_{\alpha\alpha} + \tfrac{1}{2}\,\mathfrak{S}^{(e)}_{\alpha\alpha} = d_\alpha\,\mathfrak{S}^{(e)}_{\alpha}(\boldsymbol{d}). \tag{14}$$

Die linke Seite dieser Gleichung bedeutet die Änderung der thermischen Energie beider Komponenten durch Stöße. $\mathfrak{S}^{(e)}_{\alpha}$ ist die Impulsübertragung von einer Komponente des Plasmas zur anderen. Da $\boldsymbol{d}$ für $n=N$ proportional zum elektrischen Strom $\boldsymbol{j}$, und für kleine Diffusionsgeschwindigkeiten $\mathfrak{S}^{(e)}_{\alpha}(\boldsymbol{d}) \sim d_\alpha$ wird, bedeutet in diesem Fall die rechte Seite die dem Plasma durch OHMsche Verluste zugeführte Wärme. Die thermische Gesamtenergie des Systems ändert sich infolge von Stößen also nur dann, wenn Ströme fließen.

Anders ist die Situation jedoch, wenn man nach der Änderung der thermischen Energie nur einer Komponente, etwa der Elektronen, fragt. Zunächst kann man in Gl. (11) die Funktion $\partial\chi_\alpha/\partial d_\alpha$ mit Hilfe von Gl. (13) eliminieren und erhält

$$\tfrac{1}{2}\,\mathfrak{S}^{(e)}_{\alpha\alpha} = -\frac{\Gamma_0}{m_e}\left\{d_\alpha\frac{\partial\chi}{\partial d_\alpha} + \left[\frac{\partial\chi^\alpha}{\partial d_\alpha} + \frac{m_e}{m_i}\left(d_\alpha\frac{\partial\chi}{\partial d_\alpha} + \frac{\partial\chi^\alpha}{\partial d_\alpha} + \chi\right)\right]\right\}. \tag{15}$$

Die eckige Klammer hat die Größenordnung m_e/m_i gegenüber dem ersten Term in der geschweiften Klammer. Bei $(m_e/m_i)\cdot[\chi + d_\alpha(\partial\chi/\partial d_\alpha) + (\partial\chi^\alpha/\partial d_\alpha)]$ ist das offensichtlich, für $\partial\chi^\alpha/\partial d_\alpha$ wird dies an späterer Stelle gezeigt (Abschn. 5). Wenn $\boldsymbol{d}=0$, so erhält man also eine um m_i/m_e-mal langsamere Energieübertragung von einer Komponente des Plasmas an die andere, als für den Fall $\boldsymbol{d}\neq 0$ oder im Vergleich zur Impulsübertragung. In Fällen, in denen Ströme im Plasma auftreten, wird man die eckige Klammer in Gl. (16) vernachlässigen können. Das gilt jedoch nicht für die Ionenkomponente, da bei dieser auch das

Stromglied von der Ordnung Γ_0/m_{i} ist. Es ist zweckmäßig, alle Stoßmomente 2. Ordnung in eine zu Gl. (15) analoge Form zu bringen. Man erhält

$$\mathfrak{S}^{(\mathrm{e})}_{\alpha\beta} = \frac{\Gamma_0}{m_{\mathrm{e}}} \left\{ \varphi\, \delta_{\alpha\beta} - 3\, \vartheta^{\alpha\beta} + 3\, \frac{\partial^2 \psi}{\partial d_\alpha\, \partial d_\beta} - 2\, \delta_{\alpha\beta}\, \chi - d_\beta\, \frac{\partial \chi}{\partial d_\alpha} - d_\alpha\, \frac{\partial \chi}{\partial d_\beta} \right\}$$
$$+ \frac{\Gamma_0}{m_{\mathrm{i}}} \left\{ 2\, \frac{\partial^2 \psi}{\partial d_\alpha\, \partial d_\beta} - 2\, \delta_{\alpha\beta}\, \chi - \left(d_\beta\, \frac{\partial \chi}{\partial d_\alpha} + d_\alpha\, \frac{\partial \chi}{\partial d_\beta} \right) - \frac{m_{\mathrm{i}}}{m_{\mathrm{e}}} \left(\frac{\partial \chi^\alpha}{\partial d_\beta} + \frac{\partial \chi^\beta}{\partial d_\alpha} \right) + O\left(\frac{m_{\mathrm{e}}}{m_{\mathrm{i}}} \right) \right\} \tag{16}$$

und

$$\mathfrak{S}^{(\mathrm{i})}_{\alpha\beta} = \frac{\Gamma_0}{m_{\mathrm{i}}} \left\{ \Phi\, \delta_{\alpha\beta} - 3\, \Theta^{\alpha\beta} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial d_\alpha\, \partial d_\beta} + \frac{m_{\mathrm{i}}}{m_{\mathrm{e}}} \left(\frac{\partial \chi^\alpha}{\partial d_\beta} + \frac{\partial \chi^\beta}{\partial d_\alpha} \right) + O\left(\frac{m_{\mathrm{e}}}{m_{\mathrm{i}}} \right) \right\}.$$

Es stellt sich nun die Frage, wie man die in den Stoßmomenten auftretenden Funktionen $\varphi, \vartheta, \Phi, \Theta, \chi$ und ψ durch $\boldsymbol{d}$ und die Momente $p_{\alpha\beta}$, $q_{\alpha\beta\gamma}$, usw. ausdrücken kann. Da die Verteilungsfunktionen $f(\boldsymbol{w})$ und $F(\boldsymbol{W})$ quadratisch in den Integralen auftreten und die Geschwindigkeiten auch im Nenner stehen, ist es nicht möglich, direkt die Abhängigkeit der Stoßmomente von den Momenten anzugeben. Eine Möglichkeit jedoch ist der Umweg über die Reihenentwicklung der Verteilungsfunktion nach Hermiteschen Polynomen. Die Theorie dieser Entwicklung ist für ein Ein-Komponenten-System ausführlich von Grad diskutiert worden [5].

3. Entwicklung der Verteilungsfunktion nach Hermiteschen Polynomen

Die Verteilungsfunktion $f(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{x}, t)$ soll durch folgende Reihe dargestellt werden:

$$f(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{x}, t) = c(\boldsymbol{x}, t)\, \exp\{ - \tfrac{1}{2}\, b_{\nu\mu}(\boldsymbol{x}, t)\, w_\nu\, w_\mu \}$$
$$\cdot [a^*(\boldsymbol{x}, t) + a^*_\nu\, (\boldsymbol{x}, t)\, \mathcal{P}^{(1)}_\nu\, (\boldsymbol{w}) + a^*_{\nu\mu}\, \mathcal{P}^{(2)}_{\nu\mu}(\boldsymbol{w}) + \ldots].$$

Die $\mathcal{P}^{(N)}(\boldsymbol{w})$ $(N = 0, 1, 2, \ldots)$ sind die über der Gewichtsfunktion

$$f_0(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{x}, t)\, \mathrm{d}\boldsymbol{w} = c(\boldsymbol{x}, t) \cdot \exp\{ -\tfrac{1}{2} b_{\nu\mu}(\boldsymbol{x}, t)\, w_\nu\, w_\mu \}\, \mathrm{d}\boldsymbol{w}$$

aufgebauten Orthogonalpolynome der Ordnung N. $b_{\nu\mu}$ und $a^*_{\nu\mu}$, $a^*_{\nu\mu\lambda}, \ldots$ sind in allen Indizes symmetrische Tensoren. Die quadratische Form $b_{\nu\mu}(\boldsymbol{x}, t)\, w_\nu\, w_\mu$ stellt Scharen von ähnlichen Ellipsoiden dar. (Diese Verallgemeinerung der kugelsymmetrischen Gewichtsfunktion ist schon von A. Schlüter diskutiert worden.) Die Parameter c und $b_{\nu\mu}$ sollen so bestimmt werden, daß die Gewichtsfunktion $f_0(\boldsymbol{w})$ die gleichen Momente der Ordnung null, eins und zwei hat, wie die Verteilungsfunktion $f(\boldsymbol{w})$ selbst, also

$$\begin{aligned} \int f_0\, \mathrm{d}\boldsymbol{w} &= n(\boldsymbol{x}, t), \\ \int w_\alpha f_0\, \mathrm{d}\boldsymbol{w} &= 0, \\ m \int w_\alpha\, w_\beta\, f_0\, \mathrm{d}\boldsymbol{w} &= p_{\alpha\beta}. \end{aligned} \tag{1}$$

Wegen der Symmetrie der b_{ij} kann man die quadratische Form $b_{\nu\mu}\, w_\nu\, w_\mu$ immer durch eine Orthogonaltransformation auf Diagonalform bringen. Es sei

$$w_\mu = \sum_{i=1}^{3} \mathfrak{A}_{\mu i}\, \bar{w}_i$$

diese Orthogonaltransformation, deren Koeffizientenmatrix $\mathfrak{A}_{\mu i}(\boldsymbol{x}, t)$ von Ort und Zeit abhängt. Da $\mathrm{Det}(\mathfrak{A}_{\mu i}) = 1$ ist, folgt $\mathrm{d}\boldsymbol{w} = \mathrm{d}\bar{\boldsymbol{w}}$. Damit erhält man für die Gewichtsfunktion

$$f_0(\boldsymbol{w})\, \mathrm{d}\boldsymbol{w} = c(\boldsymbol{x}, t)\, \exp\{ -\tfrac{1}{2}\, \bar{b}_i^2\, \bar{w}_i^2 \}\, \mathrm{d}\bar{\boldsymbol{w}}. \tag{2}$$

Hier sind $\bar{b}_1^2$, $\bar{b}_2^2$, $\bar{b}_3^2$ die drei Diagonalelemente des Tensors $b_{\nu\mu}$ nach der Transformation. Es gilt

$$b_{\alpha\beta} = \sum_{i=1}^{3} \mathfrak{A}_{\alpha i}\, \mathfrak{A}_{\beta i}\, \bar{b}_i^2 \equiv \mathfrak{A}_{\alpha i}\, \mathfrak{A}_{\beta i}\, \bar{b}_i^2.$$

(Die Summenzeichen bei Summation über die lateinischen Indizes werden wir weglassen. Es ist zu beachten, daß der Summationsindex auch öfter als zweimal auftreten kann.)

Aus den Bedingungen Gl. (1) folgt dann

$$\begin{aligned} c(\boldsymbol{x}, t) &= \frac{n(\boldsymbol{x}, t)}{(2\pi)^{3/2}}\, \bar{b}_1\, \bar{b}_2\, \bar{b}_3, \\ p_{\alpha\beta} &= \varrho(\boldsymbol{x}, t)\, \mathfrak{A}_{\alpha i}\, \mathfrak{A}_{\beta i}\, \frac{1}{\bar{b}_i^2}. \end{aligned} \tag{3}$$

Multipliziert man die zweite dieser Gleichungen mit $b_{\lambda\alpha}$ und kontrahiert über α, so folgt

$$b_{\lambda\alpha}\, p_{\alpha\beta} = \varrho\, \delta_{\alpha\beta}, \tag{4}$$

$b_{\alpha\beta}/\varrho$ ist also die Reziproke des Tensors $p_{\alpha\beta}$.

Führt man statt der Geschwindigkeit $\bar{\boldsymbol{w}}$ die dimensionslose Geschwindigkeit

$$\boldsymbol{\zeta} = \{\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3\} = \{\bar{b}_1\, \bar{w}_1, \bar{b}_2\, \bar{w}_2, \bar{b}_3\, \bar{w}_3\}$$

[5] H. Grad, Commun. Pure Appl. Math. 2, 331 [1949].

ein, so erhält man aus Gl. (2) für die Gewichtsfunktion

$$f_0(\boldsymbol{w})\,\mathrm{d}\boldsymbol{w} = \frac{n(\boldsymbol{x},t)}{(2\pi)^{3/2}} \exp[-\boldsymbol{\zeta}^2/2]\,\mathrm{d}\boldsymbol{\zeta}. \tag{5}$$

Die zu der Gewichtsfunktion $(2\pi)^{-3/2}\exp[-\boldsymbol{\zeta}^2/2]$ gehörenden Orthogonalfunktionen sind bekanntlich die HERMITEschen Polynome. (Über deren Verallgemeinerung auf N Dimensionen vgl. GRAD, Note on N-Dimensional HERMITE Polynomials [6].) Die HERMITEschen Polynome bis einschließlich vierter Ordnung sind

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}^{(0)}(\boldsymbol{\zeta}) &= 1,\\
\mathcal{H}^{(1)}_i(\boldsymbol{\zeta}) &= \zeta_i,\\
\mathcal{H}^{(2)}_{ij}(\boldsymbol{\zeta}) &= \zeta_i\zeta_j - \delta_{ij},\\
\mathcal{H}^{(3)}_{ijk}(\boldsymbol{\zeta}) &= \zeta_i\zeta_j\zeta_k - (\zeta_i\delta_{jk} + \zeta_j\delta_{ik} + \zeta_k\delta_{ij}),\\
\mathcal{H}^{(4)}_{ijkl}(\boldsymbol{\zeta}) &= \zeta_i\zeta_j\zeta_k\zeta_l - (\zeta_i\zeta_j\delta_{kl} + \zeta_i\zeta_k\delta_{jl} + \zeta_i\zeta_l\delta_{jk}\\
&\quad + \zeta_j\zeta_k\delta_{il} + \zeta_j\zeta_l\delta_{ik} + \zeta_k\zeta_l\delta_{ij})\\
&\quad + (\delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}).
\end{aligned}$$

Diese Polynome sind orthogonal zueinander auch in bezug auf die Kombination der Indizes bei gleicher Ordnung. Für die Reihenentwicklung der Verteilungsfunktion ergibt sich damit

$$\begin{aligned}
f(\boldsymbol{w},\boldsymbol{x},t)\,\mathrm{d}\boldsymbol{w} &= \frac{n(\boldsymbol{x},t)}{(2\pi)^{3/2}}\exp[-\boldsymbol{\zeta}^2/2]\\
&\quad\cdot[a + a_i\mathcal{H}^{(1)}_i(\boldsymbol{\zeta}) + a_{ij}\mathcal{H}^{(2)}_{ij}(\boldsymbol{\zeta}) + a_{ijk}\mathcal{H}^{(3)}_{ijk}(\boldsymbol{\zeta}) + \ldots]\,\mathrm{d}\boldsymbol{\zeta}.
\end{aligned} \tag{6}$$

Die $a, a_i, a_{ij}, \ldots$ sind die von Ort und Zeit abhängenden FOURIER-Koeffizienten der Verteilungsfunktion $f(\boldsymbol{w},\boldsymbol{x},t)$. Der Koeffizient der Ordnung N läßt sich durch eine Linearkombination von Momenten der Ordnungen $N' \leqq N$ darstellen. Da die Gewichtsfunktion $f_0(\boldsymbol{w},\boldsymbol{x},t)$ die Gl. (1) erfüllt, sind die FOURIER-Koeffizienten der drei niedrigsten Ordnungen, a, a_i und a_{ij}, eindeutig bestimmt. Man findet $a=1$, $a_i=0$, $a_{ij}=0$. Man erhält dann

$$\begin{aligned}
f(\boldsymbol{w},\boldsymbol{x},t)\,\mathrm{d}\boldsymbol{w} &= \frac{n}{(2\pi)^{3/2}}\exp[-\boldsymbol{\zeta}^2/2]\\
&\quad\cdot[1 + a_{ijk}\mathcal{H}^{(3)}_{ijk}(\boldsymbol{\zeta}) + \ldots]\,\mathrm{d}\boldsymbol{\zeta}.
\end{aligned}$$

Wir hatten schon oben gesagt, daß man das unendliche System von Momentengleichungen abbrechen muß, wenn man konkrete Fälle behandeln will. Die konsequenteste Art abzubrechen scheint zu sein, daß man in der Orthogonalentwicklung Gl. (6) die Entwicklungskoeffizienten ab irgendeiner Ordnung $N+1$ streicht. Man kann dann das in der N-ten Momentengleichung vorkommende Moment der Ordnung $N+1$ durch die N ersten Entwicklungskoeffizienten ausdrücken, d. h. durch die N niedrigsten Momente.

Hier sollen die Entwicklungskoeffizienten 4. und höherer Ordnung vernachlässigt werden. Eine weitere Vereinfachung erhält man, wenn man

$$a_{ijk} = \tfrac{1}{3}(a_i\delta_{jk} + a_j\delta_{ik} + a_k\delta_{ij}) \tag{7}$$

setzt. Man erhält damit die von GRAD eingeführte „13-Momenten-Näherung“. In dieser Näherung wird der Drucktransporttensor durch die drei Komponenten des Wärmestroms ausgedrückt. Im Hauptachsensystem sind diese proportional zu a_i. Wenn man Gl. (7) z. B. über j, k kontrahiert, so folgt

$$a_{ikk} = \tfrac{5}{3}a_i.$$

Dies gilt für beliebige Vertauschungen der Indizes. Die a_i werden so bestimmt, daß die Näherung Gl. (7) bei Kontraktion das gleiche Ergebnis liefert wie der volle Drucktransporttensor. Da die Koeffizienten erster Ordnung immer null sind, können die in Gl. (7) auftretenden a_i nicht mit diesen verwechselt werden. Setzt man Gl. (7) in Gl. (6) ein, so erhält man als Näherung der Verteilungsfunktion

$$\begin{aligned}
f(\boldsymbol{w},\boldsymbol{x},t) &= \frac{n(\boldsymbol{x},t)}{(2\pi)^{3/2}}\exp[-\boldsymbol{\zeta}^2/2]\\
&\quad\cdot[1 + a_i(\boldsymbol{x},t)\,\zeta_i(\boldsymbol{\zeta}^2 - 5)]\,\mathrm{d}\boldsymbol{\zeta}.
\end{aligned} \tag{8}$$

Für das Moment dritter Ordnung folgt dann

$$\begin{aligned}
q_{\alpha\beta\gamma} &= \varrho\,\frac{\mathfrak{A}_{\alpha i}\mathfrak{A}_{\beta j}\mathfrak{A}_{\gamma k}}{\bar{b}_i\bar{b}_j\bar{b}_k}\cdot\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\\
&\quad\cdot\int \zeta_i\zeta_j\zeta_k\exp[-\boldsymbol{\zeta}^2/2]\cdot[1 + a_l\zeta_l(\boldsymbol{\zeta}^2 - 5)]\,\mathrm{d}\boldsymbol{\zeta}\\
&= q_\alpha p_{\beta\gamma} + q_\beta p_{\alpha\gamma} + q_\gamma p_{\alpha\beta},
\end{aligned} \tag{9}$$

wobei

$$q_\alpha = \mathfrak{A}_{\alpha i}(2\,a_i/\bar{b}_i). \tag{10}$$

Der Vektor q_α hat die Dimension einer Geschwindigkeit. Sie gibt an, wie schnell thermische Energie durch Diffusion transportiert wird. Durch Kontraktion von $q_{\alpha\beta\gamma}$ über zwei Indizes erhält man für den Wärmestromvektor

$$s_\alpha = \tfrac{1}{2}q_{\alpha\beta\beta} = \tfrac{3}{2}p\,q_\alpha + p_{\alpha\mu}q_\mu. \tag{11}$$

Hierbei ist $3p = p_{\beta\beta}$ die Spur des Drucktensors. In der Momentengleichung N-ter Ordnung tritt auch noch das Moment $(N+1)$-ter Ordnung auf. Da die Verteilungsfunktion hier in dritter Ordnung approximiert wird, benötigt man in der Momentengleichung dritter Ordnung das Moment vierter Ord-

[6] H. GRAD, Commun. Pure Appl. Math. **2**, 325 [1949].

nung $q^*_{\alpha\beta\gamma\delta}$, welches sich durch die Momente zweiter Ordnung ausdrücken läßt. Man findet

$$q^*_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{1}{\varrho}\,(p_{\alpha\beta}\,p_{\gamma\delta} + p_{\alpha\gamma}\,p_{\beta\delta} + p_{\beta\gamma}\,p_{\alpha\delta})\,. \qquad (12)$$

Durch den speziellen Ansatz Gl. (8) ist über alle Momente der Verteilungsfunktionen verfügt worden, jedoch sind nur 13 Momente linear unabhängig. Es gibt offenbar eine ganze Klasse von Funktionen, welche die Momente bis einschließlich 4. Ordnung mit der Näherungsfunktion Gl. (8) gemeinsam haben, nämlich alle Funktionen, die sich nur in den höheren Momenten von dieser Näherungsfunktion unterscheiden. Nach A. SCHLÜTER kann man auch Gl. (12) postulieren und auf diese Weise das System der Momentengleichungen abbrechen; es muß dann aber das Stoßglied $(\partial f/\partial t)_{\text{st}}$ durch die mitgeführten Momente allein (hier also bis 3. Ordnung) ausdrückbar sein. Das ist z. B. möglich bei dem einfachen Ansatz $(\partial f/\partial t)_{\text{st}} \sim (f_{\text{maxwell}} - f)$. Der Anregung SCHLÜTERS folgend, wird Gl. (12) auch von KAEPPELER [7] benutzt, um das System der Momentengleichungen abzubrechen.

Die Entwicklung der Verteilungsfunktion über einer Gewichtsfunktion von elliptischer Symmetrie hat den Vorteil, daß eine beliebig große Anisotropie im Druck schon durch die Gewichtsfunktion (welche die nullte Näherung darstellt) beschreibbar ist. Ein weiterer Vorteil ist, daß in der „13-Momenten-Approximation" bei elliptischer Gewichtsfunktion nur der eine Koeffizient a_i auftritt, um Abweichungen von der nullten Näherung zu beschreiben. Erst wenn Wärmeströme auftreten, wird $a_i \neq 0$. Ein Nachteil sind die mathematischen Komplikationen, die auftreten können, insbesondere dann, wenn die Lage der Hauptachsenrichtungen des Drucktensors nicht unmittelbar ersichtlich ist, so daß man die Hauptachsentransformation durchführen muß, oder wenn sich deren Lage für Ionen und Elektronen unterscheidet. Jedenfalls ist die Berechnung der Stoßmomente in diesem Fall schwieriger als bei Entwicklung über einer kugelsymmetrischen Gewichtsfunktion.

Für die Ionenverteilung erhält man

$$F(\boldsymbol{W}, \boldsymbol{x}, t)\,\mathrm{d}\boldsymbol{W} = \frac{N}{(2\,\pi)^{3/2}}\exp[-\boldsymbol{\zeta}^2/2] \cdot [1 + A_i\,Z_i(\boldsymbol{\zeta}^2 - 5)]\,\mathrm{d}\boldsymbol{\zeta}, \qquad (13)$$

wobei $\zeta_1 = \overline{B}_1\,\overline{W}_1$, usw. $\overline{B}_i^2\,\overline{W}_i^2$ ist die quadratische Form $B_{\mu\nu}\,W_\mu\,W_\nu$ im Hauptachsensystem, $\mathfrak{B}_{\mu i}$ sei die Transformationsmatrix für die Ionen. In vielen Fällen wird $\mathfrak{A}_{\mu i} = \mathfrak{B}_{\mu i}$ sein, insbesondere wenn die Anisotropie im Druck durch elektro-magnetische Felder hervorgerufen wird, die ja in gleicher Weise auf Ionen und Elektronen wirken.

Setzt man

$$s^*_{\alpha\mu} = \tfrac{1}{2}\,q^*_{\alpha\beta\beta\mu} = (\tfrac{3}{2}\,p\,p_{\alpha\mu} + p_{\alpha\beta}\,p_{\beta\mu})/\varrho_{\text{e}}\,,$$

so erhält man für die Momentengleichung dritter Ordnung in kontrahierter Form, d. h. also für die Wärmestromgleichung:

$$\begin{aligned}\frac{\partial s_\alpha}{\partial t} + v_\mu\,\frac{\partial s_\alpha}{\partial x_\mu} + \frac{\partial s^*_{\alpha\mu}}{\partial x_\mu} + \frac{\partial v_\mu}{\partial x_\mu}\,s_\alpha + \frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\mu}\,s_\mu + \omega_{\mu\alpha}\,s_\mu - \frac{3}{2}\,\frac{p}{\varrho_{\text{e}}}\,\frac{\partial p_{\alpha\mu}}{\partial x_\mu}& \\ - \frac{p_{\alpha\nu}}{\varrho_{\text{e}}}\,\frac{\partial p_{\mu\nu}}{\partial x_\mu} + q_\alpha\,\frac{\partial v_\nu}{\partial x_\mu}\,p_{\mu\nu} + p_{\alpha\mu}\,q_\nu\left(\frac{\partial v_\mu}{\partial x_\nu} + \frac{\partial v_\nu}{\partial x_\mu}\right) = \mathfrak{T}^{(\text{e})}_\alpha .&\end{aligned} \qquad (14)$$

$\mathfrak{T}^{(\text{e})}_\alpha$ ist definiert durch

$$\begin{aligned}\mathfrak{T}^{(\text{e})}_\alpha &= \tfrac{1}{2}\left(\mathfrak{S}^{(\text{e})}_{\alpha\mu\mu} - 3\,\frac{p}{\varrho_{\text{e}}}\,\mathfrak{S}^{(\text{e})}_\alpha - 2\,\frac{p_{\alpha\mu}}{\varrho_{\text{e}}}\,\mathfrak{S}^{(\text{e})}_\mu\right) \\ &= \frac{\Gamma_0}{m_{\text{e}}}\left\{\varphi_\alpha - 3\,\vartheta^{\alpha\mu}_\mu + \tfrac{1}{2}\,\partial_\mu\,\partial_\mu\,\psi_\alpha + \partial_\alpha\,\partial_\mu\,\psi_\mu - \left(1 + \frac{m_{\text{e}}}{m_{\text{i}}}\right)\left[\frac{1}{2}\,\partial_\alpha\,\chi_{\mu\mu} + \partial_\mu\,\chi_{\alpha\mu} - \frac{3}{2}\,\frac{p}{\varrho_{\text{e}}}\,\partial_\alpha\,\chi - \frac{p_{\alpha\mu}}{\varrho_{\text{e}}}\,\partial_\mu\,\chi\right]\right\}.\end{aligned} \qquad (15)$$

Es bedeutet hier $\partial_\alpha = \partial/\partial d_\alpha$. Bei der Ableitung dieser Gleichung ist die aus Gl. (2.7) folgende Beziehung $\vartheta^{\mu\mu}_\alpha = \varphi_\alpha$ benutzt worden. Eine entsprechende Gleichung gilt für die Ionen:

$$\mathfrak{T}^{(\text{i})}_\alpha = \frac{\Gamma_0}{m_{\text{i}}}\left\{\Phi_\alpha - 3\,\Theta^{\alpha\mu}_\mu + \tfrac{1}{2}\,\partial_\mu\,\partial_\mu\,\psi^\alpha + \partial_\alpha\,\partial_\mu\,\psi^\mu + \left(1 + \frac{m_{\text{i}}}{m_{\text{e}}}\right)\left[\frac{1}{2}\,\partial_\alpha\,\chi^{\mu\mu} + \partial_\mu\,\chi^{\alpha\mu} - \frac{3}{2}\,\frac{P}{\varrho_{\text{i}}}\,\partial_\alpha\,\chi - \frac{P_{\alpha\mu}}{\varrho_{\text{i}}}\,\partial_\mu\,\chi\right]\right\}. \qquad (15\,\text{a})$$

[7] H. J. KAEPPELER, Z. Naturforschg. **14 a**, 1056 [1959].

4. Berechnung der Hilfsfunktionen φ und ϑ (bzw. Φ und Θ)

In diesem Abschnitt sollen die durch Gl. (2.7) definierten Hilfsfunktionen berechnet, d. h. explizit durch die Momente ausgedrückt werden. In der 13-Momenten-Näherung treten die Funktionen φ, φ_a, $\vartheta^{\alpha\beta}$ und $\vartheta_\mu^{\alpha\mu}$ auf. Die entsprechenden Funktionen für die Ionen ergeben sich sofort, wenn man die Momente der Elektronenkomponente durch die der Ionenkomponente ersetzt. Es sollen zunächst φ und φ_a berechnet werden. Man kann φ_a in symmetrischer Form darstellen, indem man im Integral statt w_a den Ausdruck $(w_a + w_a')/2$ einsetzt. Transformiert man dann noch in das Hauptachsensystem, so folgt

$$\varphi_a = \mathfrak{A}_{ai} \cdot \frac{1}{\bar{b}_i} \cdot \frac{1}{2} \iint \frac{(\zeta_i + \zeta_i') f(\zeta) f(\boldsymbol{\zeta}')\, d\zeta\, d\zeta' \boldsymbol{\zeta}\, d\boldsymbol{\zeta}'}{[(\zeta_1-\zeta_1')^2/\bar{b}^{\,2} + (\zeta_2-\zeta_2')^2/\bar{b}_2^2 + (\zeta_3-\zeta_3')^2/\bar{b}_3^2]^{1/2}} \,. \tag{1}$$

Es liegt nahe, die Substitution $\zeta_i - \zeta_i' = \xi_i \sqrt{2}$ und $\zeta_i + \zeta_i' = \eta_i \sqrt{2}$ durchzuführen. Für das Volumelement erhält man dann $d\boldsymbol{\zeta} d\boldsymbol{\zeta}' = d\boldsymbol{\xi}\, d\boldsymbol{\eta}$. Das Integrationsgebiet ist wieder der ganze Raum. $\boldsymbol{\zeta}^2 + \boldsymbol{\zeta}'^2$ geht über in $\boldsymbol{\xi}^2 + \boldsymbol{\eta}^2$. Damit erhält man

$$f(\boldsymbol{\zeta})\, f(\boldsymbol{\zeta}')\, d\boldsymbol{\zeta}\, d\boldsymbol{\zeta}' = \frac{n^2}{(2\pi)^3} \exp\{-\tfrac{1}{2}(\boldsymbol{\xi}^2 + \boldsymbol{\eta}^2)\} \cdot \left[1 + a_i \frac{\eta_i + \xi_i}{\sqrt{2}} \left(\frac{(\boldsymbol{\eta}+\boldsymbol{\xi})^2}{2} - 5\right)\right] \cdot \left[1 + a_j \frac{\eta_i + \xi_i}{\sqrt{2}} \left(\frac{(\boldsymbol{\eta}-\boldsymbol{\xi})^2}{2} - 5\right)\right] d\boldsymbol{\xi}\, d\boldsymbol{\eta}$$

Vernachlässigt man Glieder, die quadratisch in a_i sind (diese Annahme darf man machen, da die „Wärmestromapproximation" nur dann gilt, wenn für die Norm des Vektors a_i gilt $\| a \| \ll 1$), so folgt für das Produkt der eckigen Klammern

$$R(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) = 1 + (a_i/\sqrt{2})\, [\eta_i(\boldsymbol{\eta}^2 - 5) + \eta_i(\boldsymbol{\xi} - 5) + 2\, \xi_i (\boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\eta})] \,.$$

Es ergibt sich also aus Gl. (1)

$$\varphi_a = \frac{n^2}{\sqrt{2}} \frac{\mathfrak{A}_{ai}}{\bar{b}_i} \cdot \frac{1}{(2\pi)^3} \iint \frac{\eta_i \exp[-(\boldsymbol{\xi}^2 + \boldsymbol{\eta}^2)/2]\, R(\boldsymbol{\eta}\, \boldsymbol{\xi},)}{[\beta_1 \xi_1^2 + \beta_2 \xi_2^2 + \beta_3 \xi_3^2]^{1/2}}\, d\boldsymbol{\xi}\, d\boldsymbol{\eta}, \tag{2}$$

wobei $\beta_1 = 2/\bar{b}_1^{\,2}$ usw. Offenbar erhält man φ, indem man auf der rechten Seite von Gl. (2) statt η_i und $\mathfrak{A}_{ai}/\sqrt{2}\, \bar{b}_i$ jeweils 1 einsetzt. Die Integration über $\boldsymbol{\eta}$ läßt sich unter Berücksichtigung der Orthogonalitätsrelationen leicht ausführen und man erhält

$$\varphi = \frac{n^2}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{\exp[-\boldsymbol{\xi}^2/2]\, d}{[\beta_1 \xi_1^2 + \beta_2 \xi_2^2 + \beta_3 \xi_3^2]^{1/2}}$$

und

$$\varphi_a = \frac{n^2}{2} \mathfrak{A}_{ai} \frac{a_i}{\bar{b}_i} \cdot \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{[\boldsymbol{\xi}^2 - 5 + 2\, \xi_i^2] \exp[-\boldsymbol{\xi}^2/2]\, d\boldsymbol{\xi}}{[\beta_1 \xi_1^2 + \beta_2 \xi_2^2 + \beta_3 \xi_3^2]^{1/2}} \,.$$

Der Typ der hier auftretenden Integrale über $\boldsymbol{\xi}$ ist in der Literatur bekannt[8]. Man kann die 3-fache Integration über den $\boldsymbol{\xi}$-Raum auf eine einfache Integration über einen Parameter s zurückführen. Man erhält für $m_1 + m_2 + m_3 > 2r$ und $m_i, r > 0$:

$$\int \frac{\xi_1^{m_1 - 1} \xi_2^{m_2 - 1} \xi_3^{m_3 - 1}}{[\beta_1 \xi_1^2 + \beta_2 \xi_2^2 + \beta_3 \xi_3^2]^r} \exp[-\boldsymbol{\xi}^2/2]\, d\boldsymbol{\xi}$$
$$= \frac{\Gamma(m_1/2)\, \Gamma(m_2/2)\, \Gamma(m_3/2)}{\beta^r\, \Gamma(r)}\, 2^{(m_1+m_2+m_3)/2 - r + 1} \int_0^1 \frac{s^{2r-1} (1-s^2)^{(m_1+m_2+m_3)/2 - r - 1}\, ds}{(1+\tau_1 s)^{m_1/2} (1+\tau_2 s)^{m_2/2} (1+\tau_3 s)^{m_3/2}}$$

mit $\beta = (\beta_1 + \beta_2 + \beta_3)/3$ und $\tau_i = (\beta_i/\beta) - 1$. Es folgt damit schließlich

$$\varphi = \frac{2\, n^2}{\sqrt{\pi \beta}}\, C \tag{3}$$

und

$$\varphi_a = \frac{2\, n^2}{\sqrt{\pi \beta}} [-\tfrac{3}{4} C\, q_a + \tfrac{1}{2} C_{a\mu}\, q_\mu] \,. \tag{4}$$

Die Größen C und $C_{a\beta}$ sind erklärt durch

$$C = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^1 \frac{ds}{D(\tau, s)} \,,$$

$$C_{a\beta} = \mathfrak{A}_{ai}\, \mathfrak{A}_{\beta i} \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^1 \frac{1-s^2}{1+\tau_i s^2} \frac{ds}{D(\tau, s)} \,,$$

[8] I. M. Ryskik u. I. S. Gradstein, Σ-Π-$\int$-Tafeln, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1957, S. 220.

$$D = \sqrt{(1+\tau_1 s^2)(1+\tau_2 s^2)(1+\tau_3 s^2)}\,.$$

In den Stoßmomenten treten weiterhin die Funktionen $\vartheta^{\alpha\beta}$ und $\vartheta_\mu^{\alpha\mu}$ auf. Es ist

$$\begin{aligned}\vartheta^{\alpha\beta} &= \frac{\mathfrak{A}_{\alpha i}\,\mathfrak{A}_{\beta j}}{b_i\,b_j} \iint \frac{(\zeta_i-\zeta_i')(\zeta_j-\zeta_j')}{|\bar{\boldsymbol{w}}-\bar{\boldsymbol{w}}'|}\, f f'\,\mathrm{d}\,\bar{\boldsymbol{w}}\,\mathrm{d}\bar{\boldsymbol{w}}' \\ &= n^2\,\mathfrak{A}_{\alpha i}\,\mathfrak{A}_{\beta i}\,\beta_i \cdot \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{\xi_i^2 \exp[-\boldsymbol{\xi}^2/2]\,\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}}{[\beta_1\,\xi_1^2+\beta_2\,\xi_2^2+\beta_3\,\xi_3^2]^{3/2}} \\ &= \frac{2\,n^2}{\sqrt{\pi}\,\beta}\,[\delta_{\alpha\beta}\,C - C_{\alpha\beta}]\,. \end{aligned} \tag{5}$$

In dem zweiten Ausdruck ist die Integration über η durchgeführt; ferner ist berücksichtigt, daß $\xi_i\,\xi_j$ im Zähler bei der Integration ein δ-Symbol ergibt. Der letzte Ausdruck ergibt sich nach der Integration über ξ. Schließlich erhält man nach ähnlichen Umformungen

$$\vartheta_\mu^{\alpha\mu} = \frac{2\,n^2}{\sqrt{\pi}\,\beta}\,[-\tfrac{3}{4}\,C\,q_\alpha + \tfrac{5}{4}\,C_{\alpha\mu}\,q_\mu]\,. \tag{6}$$

5. Die Berechnung der Hilfsfunktionen χ und ψ

In diesem Abschnitt werden die Hilfsfunktionen berechnet, die in den Stoßmomenten bis einschließlich dritter Ordnung vorkommen. Zunächst ist

$$\chi = \iint \frac{f(\boldsymbol{w})\,F(\boldsymbol{\mathfrak{W}})}{|\boldsymbol{w}-\boldsymbol{W}-\boldsymbol{d}|}\,\mathrm{d}\boldsymbol{w}\,\mathrm{d}\boldsymbol{W}. \tag{1}$$

Setzt man Gl. (3.8) und Gl. (3.13) ein, so erhält man, unter Berücksichtigung der Identität

$$\mathcal{H}_{ijk}^{(3)} \exp[-\boldsymbol{\xi}^2/2] = -\frac{\partial}{\partial\zeta_i}\,\frac{\partial}{\partial\zeta_j}\,\frac{\partial}{\partial\zeta_k}\exp[-\boldsymbol{\zeta}^2/2]\,,$$

$$\chi = \frac{n\,N}{(2\pi)^3} \iint \frac{[1-a_i(\partial/\partial\zeta_i)\,\Delta_\zeta]\exp[-\boldsymbol{\zeta}^2/2]\cdot[1-A_i(\partial/\partial Z_i)\,\Delta_Z]\exp[-\boldsymbol{Z}^2/2]}{|\boldsymbol{w}-\boldsymbol{W}-\boldsymbol{d}|}\,\mathrm{d}\boldsymbol{\zeta}\,\mathrm{d}\boldsymbol{Z}\,.$$

Durch partielle Integration lassen sich die Ableitungen nach ζ_i und Z_i in solche nach d_i verwandeln und vor das Integral ziehen. Insbesondere gilt

$$a_i \int \frac{(\partial/\partial\zeta_i)\exp[-\boldsymbol{\zeta}^2/2]}{|\boldsymbol{w}-\boldsymbol{W}-\boldsymbol{d}|}\,\mathrm{d}\boldsymbol{\zeta} = \mathfrak{A}_{\alpha i}\,\frac{a_i}{\bar{b}_i}\,\frac{\partial}{\partial d_\alpha}\int \frac{\exp[-\boldsymbol{\zeta}^2/2]\,\mathrm{d}}{|\boldsymbol{w}-\boldsymbol{W}-\boldsymbol{d}|} \tag{2 a}$$

und

$$A_i \int \frac{(\partial/\partial Z_i)\exp[-\boldsymbol{Z}^2/2]}{|\boldsymbol{w}-\boldsymbol{W}-\boldsymbol{d}|}\,\mathrm{d}\boldsymbol{Z} = -\mathfrak{B}_{\alpha i}\,\frac{A_i}{\bar{B}_i}\,\frac{\partial}{\partial d_\alpha}\int \frac{\exp[-\boldsymbol{Z}^2/2]\,\mathrm{d}\boldsymbol{Z}}{|\boldsymbol{w}-\boldsymbol{W}-\boldsymbol{d}|}\,. \tag{2 b}$$

Mit Hilfe der Relationen Gl. (3.3) und Gl. (3.10) folgt dann

$$\chi = \frac{n\,N}{(2\pi)^3}\left[1-\frac{1}{2}\,q_\mu\,\partial_\mu\,\frac{p_{\nu\lambda}}{\varrho_\mathrm{e}}\,\partial_\nu\,\partial_\lambda\right]\cdot\left[1+\frac{1}{2}\,Q_\varkappa\,\partial_\varkappa\,\frac{P_{\sigma\tau}}{\varrho_\mathrm{i}}\,\partial_\sigma\,\partial_\tau\right]\iint \frac{\exp[-(\boldsymbol{\zeta}^2+\boldsymbol{Z}^2)/2]\,\mathrm{d}\boldsymbol{\zeta}\,\mathrm{d}\boldsymbol{Z}}{|\boldsymbol{w}-\boldsymbol{W}-\boldsymbol{d}|}\,. \tag{3}$$

Die q_μ sind von der Größenordnung

$$q_\mu \sim (p/\varrho_\mathrm{e})^{1/2}\cdot\|\,a\,\|\,,$$

während man für Q_μ erhält

$$Q_\mu \sim (P/\varrho_\mathrm{i})^{1/2}\cdot\|\,A\,\|\,;$$

$\|\,a\,\|$ und $\|\,A\,\|$ seien die Normen der Vektoren a_i und A_i. Unter der Annahme, daß $\|\,a\,\| \sim \|\,A\,\|$ und $P \sim p$, ist der Term mit Q_μ von der Ordnung $(m_\mathrm{e}/m_\mathrm{i})^{3/2}$ gegen den Term mit q_μ. Man darf also unter noch weit schwächeren Voraussetzungen über die Größenordnungen von p, P, $\|\,a\,\|$ und $\|\,A\,\|$ den Term mit Q_μ streichen.

Es bleibt jetzt noch das Integral in Gl. (3) zu berechnen. Zunächst soll gezeigt werden, daß man in der Näherung, in der man $m_\mathrm{e}/m_\mathrm{i}$ gegen 1 vernachlässigen kann, die Ionenverteilungsfunktion als δ-Funktion betrachten darf. Es sei für diesen Zweck angenommen, daß beide Verteilungen kugelsymmetrisch sind (das Ergebnis dieser Betrachtung gilt aber auch für Funktionen von ellipsoidischer Symmetrie). Dann kann man für den Exponenten der Exponentialfunktion schreiben

$$\boldsymbol{\zeta}^2 + \boldsymbol{Z}^2 = \bar{b}^2\,\boldsymbol{w}^2 + \bar{B}^2\,\boldsymbol{W}^2.$$

Führt man $w_i - W_i = \xi_i$ als neue Variable ein, so erhält man

$$\bar{b}^2\,\boldsymbol{w}^2 + \bar{B}^2\,\boldsymbol{W}^2 = \bar{b}^2\,\boldsymbol{\xi}^2 + 2\,\bar{b}^2\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{W} + (\bar{b}^2+\bar{B}^2)\,\boldsymbol{W}^2.$$

Hier ist offenbar $\bar{b}^2/\bar{B}^2$ von der Ordnung $m_\mathrm{e}/m_\mathrm{i}$, so daß man $\bar{b}^2$ in der Klammer vernachlässigen darf. Eine weitere Umformung ergibt für diesen Ausdruck

$$\bar{b}^2\,\boldsymbol{\xi}^2 + \bar{B}^2[\boldsymbol{w} + (\bar{b}^2/\bar{B}^2)\,\boldsymbol{\xi}]^2 - (\bar{b}^2/\bar{B}^2)\,\bar{b}^2\boldsymbol{\xi}^2.$$

Der letzte Term ist wieder von der Ordnung $m_\mathrm{e}/m_\mathrm{i}$ gegen den ersten, während die eckige Klammer für jedes feste $\boldsymbol{\xi}$ lediglich eine Verschiebung des Maximums der Gauss-Funktion $\exp[-\tfrac{1}{2}\bar{B}^2\boldsymbol{W}^2]$ ergibt. Die Integration über $\boldsymbol{W}$ liefert also $(2\pi)^{3/2}$. Setzt man statt $\boldsymbol{\xi}$, welches ja Integrationsvariable ist, wieder $\boldsymbol{w}$ ein, so erhält man für das Integral in Gl. (3)

$$\chi^*(\boldsymbol{d}) = \frac{n\,N}{(2\,\pi)^{3/2}} \int \frac{\exp[-\boldsymbol{\zeta}^2/2]\,\mathrm{d}\boldsymbol{\zeta}}{|\,\boldsymbol{w}-\boldsymbol{d}\,|}. \tag{4}$$

Für die Funktion ψ erhält man einen ganz ähnlichen Ausdruck wie Gl. (3) und an Stelle von Gl. (4) das Integral

$$\psi^*(\boldsymbol{d}) = \frac{n\,N}{(2\,\pi)^{3/2}} \int |\,\boldsymbol{w}-\boldsymbol{d}\,| \exp[-\boldsymbol{\zeta}^2/2]\,\mathrm{d}\boldsymbol{\zeta}. \tag{5}$$

Diese Integrale hängen offenbar mit den Lösungen der Potential- bzw. Bipotentialgleichung mit der Dichtefunktion $\exp[-\frac{1}{2}\,\bar{b}_\mu^2\,\bar{w}_\mu^2]$ zusammen. Man kann diese Lösungen durch ein den elliptischen Integralen verwandtes Integral ausdrücken und erhält für die Funktionen $\chi^*(\boldsymbol{d})$ und $\psi^*(\boldsymbol{d})$

$$\chi^*(\boldsymbol{d}) = \frac{2\,n\,N}{\sqrt{\pi\,\beta}} \int_0^1 \frac{\mathrm{d}s}{D(\tau,s)} \exp\left[-\frac{s^2}{\beta}\left(\frac{\bar{d}_1^{\,2}}{1+\tau_2\,s^2} + \frac{\bar{d}_2^{\,2}}{1+\tau_2\,s^2} + \frac{\bar{d}_3^{\,2}}{1+\tau_3\,s^2}\right)\right] \tag{6}$$

und
$$\psi^*(\boldsymbol{d}) = -\frac{\beta}{2}\cdot\frac{2\,n\,N}{\sqrt{\pi\,\beta}} \int_0^1 \frac{\mathrm{d}s}{D(\tau,s)}\left(\frac{1}{s^2}-1\right)\left\{\exp\left[-\frac{s^2}{\beta}\left(\frac{\bar{d}_1^{\,2}}{1+\tau_1\,s^2} + \frac{\bar{d}_2^{\,2}}{1+\tau_2\,s^2} + \frac{\bar{d}_3^{\,2}}{1+\tau_3\,s^2}\right)\right]-1\right\}. \tag{7}$$

Es ist zu beachten, daß die Funktionen χ^* und ψ^* explizit von $\bar{\boldsymbol{d}}$, also den Komponenten der Diffusionsgeschwindigkeit im Hauptachsensystem des Elektronen-Drucktensors, abhängen und nicht von $\boldsymbol{d}$. Wenn das Hauptachsensystem mit dem gewählten Koordinatensystem nicht zusammenfällt, muß man die Ableitungen nach d_μ mit Hilfe der Transformation $\mathfrak{A}_{\mu i}$ berechnen.

Wir wollen die Ausdrücke $(p_{\mu\nu}/\varrho_e)\,\partial_\mu\,\partial_\nu\,\chi^*$ und $(p_{\mu\nu}/\varrho_e)\,\partial_\mu\,\partial_\nu\,\psi^*$ noch vereinfachen. Aus Gl. (2 a) folgt

$$\frac{p_{\mu\nu}}{\varrho_e}\,\partial_\mu\,\partial_\nu\,\chi^* = \frac{n\,N}{(2\,\pi)^{3/2}} \int \frac{\Delta_\zeta \exp[-\boldsymbol{\zeta}^2/2]}{|\,\boldsymbol{w}-\boldsymbol{d}\,|}\,\mathrm{d}\boldsymbol{\zeta}$$
$$= \frac{n\,N}{(2\,\pi)^{3/2}} \int \frac{(\boldsymbol{\zeta}^2-3)\exp[-\boldsymbol{\zeta}^2/2]}{|\,\boldsymbol{w}-\boldsymbol{d}\,|}\,\mathrm{d}\boldsymbol{\zeta}.$$

Man kann nun $\boldsymbol{\zeta}^2\exp[-\boldsymbol{\zeta}^2/2]$ durch $-2(\partial/\partial\lambda)\cdot\exp[-\boldsymbol{\zeta}^2\,\lambda/2]$ darstellen, wenn man nach der Differentiation den Grenzübergang $\lambda\to 1$ macht. Vertauscht man dann noch die Integration über $\boldsymbol{\zeta}$ mit dem Grenzübergang und der Ableitung, so folgt

$$\frac{p_{\mu\nu}}{\varrho_e}\,\partial_\mu\,\partial_\nu\,\chi^* = -\chi^* - d_\mu\,\partial_\mu\,\chi^*$$

und
$$\frac{p_{\mu\nu}}{\varrho_e}\,\partial_\mu\,\partial_\nu\,\psi^* = \psi^* - d_\mu\,\partial_\mu\,\psi^*.$$

Man erhält damit aus Gl. (3)

$$\chi = [1 + q_\mu\,\partial_\mu + \tfrac{1}{2}\,d_\nu\,\partial_\nu\,q_\mu\,\partial_\mu]\,\chi^* \tag{8}$$

und für die entsprechende Formel für ψ

$$\psi = [1 + \tfrac{1}{2}\,d_\nu\,\partial_\nu\,q_\mu\,\partial_\mu]\,\psi^*. \tag{9}$$

Um χ_α zu erhalten, muß man in Gl. (1) den Integranden mit w_α multiplizieren. Da man wieder $F(\boldsymbol{W})$ als δ-Funktion auffassen kann, folgt mit der Substitution $w_\alpha = d_\alpha - (d_\alpha - w_\alpha)$

$$\chi_\alpha = d_\alpha\,\chi - \partial_\alpha\,\psi\,.$$

Bei der Berechnung von ψ_α kann man auf ähnliche Weise vorgehen. Mit Hilfe einer Hilfsfunktion

$$\hat{\psi} = \int |\,\boldsymbol{w}-\boldsymbol{d}\,|^3\,f(\boldsymbol{w})\,\mathrm{d}\boldsymbol{w}\,,$$

welche die Relation $\partial_\mu\,\partial_\mu\,\hat{\psi} = 12\,\psi$ erfüllt, folgt

$$\psi_\alpha = d_\alpha\,\psi - \tfrac{1}{3}\,\partial_\alpha\,\hat{\psi}\,.$$

Eine explizite Berechnung der Hilfsfunktion $\hat{\psi}$ ist nicht nötig, da ψ_α nur unter dem Differentiationszeichen vorkommt, so daß sich $\hat{\psi}$ wieder auf ψ reduziert. Für $\chi_{\alpha\beta}$ ergibt sich nach ähnlichen Umformungen

$$\chi_{\alpha\beta} = d_\alpha\,d_\beta\,\chi - d_\alpha\,\partial_\beta\,\psi - d_\beta\,\partial_\alpha\,\psi - \delta_{\alpha\beta}\,\psi + \tfrac{1}{3}\,\partial_\alpha\,\partial_\beta\,\hat{\psi}\,.$$

Für die in $\mathfrak{T}_\alpha^{(e)}$ auftretenden Terme erhält man damit:

$$\partial_\mu\,\partial_\mu\,\psi_\alpha = 2\,(d_\alpha\,\chi - \partial_\alpha\,\psi)\,,$$
$$\partial_\alpha\,\partial_\mu\,\psi_\mu = d_\mu\,\partial_\mu\,\partial_\alpha\,\psi\,,$$
$$\partial_\alpha\,\chi_{\mu\mu} = 2\,d_\alpha\,\chi + d_\mu\,d_\mu\,\partial_\alpha\,\chi - \partial_\alpha\,\psi - 2\,d_\mu\,\partial_\mu\,\partial_\alpha\,\psi\,,$$
$$\partial_\mu\,\chi_{\alpha\mu} = 2\,d_\alpha\,\chi + d_\alpha\,d_\mu\,\partial_\mu\,\chi - d_\mu\,\partial_\mu\,\partial_\alpha\,\psi - \partial_\alpha\,\psi\,.$$

Es bleiben noch die in $\mathfrak{S}_{\alpha\beta}^{(i)}$ und $\mathfrak{T}_\alpha^{(i)}$ auftretenden Funktionen ψ^α, χ^α und $\chi^{\alpha\beta}$, deren Berechnung etwas schwieriger ist als die der anderen Funktionen, da die Funktion $F(\boldsymbol{W})$ hier nicht ohne weiteres als δ-Funktion betrachtet werden kann. Z. B. wäre dann $\chi^\alpha = 0 + O(m_e/m_i)$. χ^α erscheint aber im Stoßmoment 2. Ordnung multipliziert mit m_i/m_e, so daß es gerade auf das Glied der Ordnung m_e/m_i ankommt. Das gleiche trifft für $\chi^{\alpha\beta}$ im Stoßmoment 3. Ordnung zu. Nur ψ^α kann vernachlässigt werden. Nach einigen Rechnungen folgt

$$\chi^\alpha = (P_{\alpha\mu}/\varrho_i)\,\partial_\mu\,\chi + \tfrac{1}{2}\,Q_\alpha(P_{\mu\nu}/\varrho_i)\,\partial_\mu\,\partial_\nu\,\chi^* + (P_{\alpha\mu}/\varrho_i)\,Q_\nu\,\partial_\nu\,\partial_\mu\,\chi^*.$$

Im ersten Term kann man statt des Integrals Gl. (1) die Funktion χ in abgekürzter Form, d. h. mit Vernachlässigung der Ionentemperatur, so wie sie in Gl. (8) angegeben ist, einsetzen. In den beiden anderen Termen haben wir χ^* eingesetzt, da Glieder, die quadratisch in Q_μ und q_μ sind, vernachlässigt werden. Ähnliche Umformungen ergeben

$$\chi^{\alpha\beta} = (P_{\alpha\beta}/\varrho_\mathrm{i})\,\chi + Q_\alpha\,(P_{\beta\mu}/\varrho_\mathrm{i})\,\partial_\mu\,\chi^* + Q_\beta(P_{\alpha\mu}/\varrho_\mathrm{i})\,\partial_\mu\,\chi^* + \tfrac{1}{2}\,(P_{\alpha\beta}/\varrho_\mathrm{i})\,Q_\mu\,\partial_\mu\,\chi^*.$$

Auch hier sind Glieder der Ordnung $m_\mathrm{e}/m_\mathrm{i}$ und $Q_\alpha\,q_\beta$ weggelassen.

Setzt man die Ausdrücke für χ_α, ψ_α usw. in die Gl. (2.10), Gl. (2.17) und Gl. (3.15) ein, so daß nur noch χ und ψ auftreten, so erhält man für die Stoßmomente der Elektronenkomponente

$$\mathfrak{S}_\alpha^{(\mathrm{e})} = -\frac{\Gamma_0}{m_\mathrm{e}}\,\partial_\alpha\,\chi\,,$$

$$\mathfrak{S}_{\alpha\beta}^{(\mathrm{e})} = \frac{\Gamma_0}{m_\mathrm{e}}\,\{\varphi\,\delta_{\alpha\beta} - 3\,\vartheta^{\alpha\beta} + 3\,\partial_\alpha\,\partial_\beta\,\psi - 2\,\delta_{\alpha\beta}\,\chi - (d_\alpha\,\partial_\beta + d_\beta\,\partial_\alpha)\,\chi\}\,,$$

$$\mathfrak{T}_\alpha^{(\mathrm{e})} = \frac{\Gamma_0}{m_\mathrm{e}}\left\{\varphi_\alpha - 3\,\vartheta_\mu^{\alpha\mu} + \tfrac{1}{2}\,\partial_\alpha\,\psi + 3\,d_\mu\,\partial_\mu\,\partial_\alpha\,\psi - 2\,d_\alpha\,\chi - \frac{d_\mu\,d_\mu}{2}\,\partial_\alpha\,\chi - d_\alpha\,d_\mu\,\partial_\mu\,\chi + \frac{3}{2}\,\frac{p}{\varrho_\mathrm{e}}\,\partial_\alpha\,\chi + \frac{p_{\alpha\mu}}{\varrho_\mathrm{e}}\,\partial_\mu\,\chi\,\cdot\right\}$$

Die entsprechenden Formeln für die Ionen lauten

$$\mathfrak{S}_\alpha^{(\mathrm{i})} = \frac{\Gamma_0}{m_\mathrm{e}}\,\partial_\alpha\,\chi\,,$$

$$\mathfrak{S}_{\alpha\beta}^{(\mathrm{i})} = \frac{\Gamma_0}{m_\mathrm{i}}\left\{\Phi\,\delta_{\alpha\beta} - 3\,\Theta^{\alpha\beta} + \partial_\alpha\,\partial_\beta\,\varphi + \frac{1}{\varrho_\mathrm{e}}\,(P_{\alpha\mu}\,\partial_\mu\,\partial_\beta + P_{\beta\mu}\,\partial_\mu\,\partial_\alpha)\,\chi + \frac{1}{2\,\varrho_\mathrm{e}}\,(Q_\alpha\,\partial_\beta + Q_\beta\,\partial_\alpha)\,P_{\mu\nu}\,\partial_\mu\,\partial_\nu\,\chi^* + \frac{1}{\varrho_\mathrm{e}}\,(P_{\alpha\mu}\,\partial_\beta + P_{\beta\mu}\,\partial_\alpha)\,Q_\nu\,\partial_\nu\,\partial_\mu\,\chi^*\right\},$$

$$\mathfrak{T}_\alpha^{(\mathrm{i})} = \frac{\Gamma_0}{m_\mathrm{i}}\left\{\Phi_\alpha - 3\,\Theta_\mu^{\alpha\mu} + \frac{1}{\varrho_\mathrm{e}}\,Q_\mu\,P_{\mu\nu}\,\partial_\nu\,\partial_\alpha\,\chi^* + \frac{3\,P}{4\,\varrho_\mathrm{e}}\,Q_\mu\,\partial_\mu\,\partial_\alpha\,\chi^* + \frac{Q_\alpha}{\varrho_\mathrm{e}}\,P_{\mu\nu}\,\partial_\mu\,\partial_\nu\,\chi^* + \frac{3}{2\,\varrho_\mathrm{e}}\,P_{\alpha\mu}\,Q_\nu\,\partial_\mu\,\partial_\nu\,\chi^*\right\}.$$

Die Funktionen χ^*, ψ^*, χ und ψ sind definiert durch die Gln. (6) – (9) und die Funktionen φ, φ_α, $\vartheta^{\alpha\beta}$ und $\vartheta_\mu^{\alpha\mu}$ durch die Gln. (4.3) – (4.6).

Wir wollen hier noch einmal zusammenfassen, welche Annahmen in diese Formeln für die Stoßmomente eingehen. Die Grundannahme ist, daß die Fokker–Planck-Gleichung (2.1) gilt, was voraussetzt, daß genügend viele Teilchen innerhalb der Debye-Kugel sind. Ferner darf das Magnetfeld nicht zu stark sein.

Die Entwicklung der Verteilungsfunktion nach Hermiteschen Polynomen gilt für beliebige Relativgeschwindigkeiten zwischen Elektronen und Ionen und für beliebige Anisotropien des Drucktensors. Die einzige Annahme über die Konvergenz dieser Entwicklung ist, daß die Koeffizienten 3. Ordnung, welche die Wärmeströme beschreiben, klein sind, d. h. $|s_\alpha| \ll \frac{5}{2}\,p\,\sqrt{p/\varrho_\mathrm{e}}$. Diese Annahme wird im allgemeinen zutreffen. In den Gleichungen für die Elektronen sind die Ionen als ruhend angenommen, d. h. Terme von der Ordnung $m_\mathrm{e}/m_\mathrm{i}$ sind gegen 1 vernachlässigt. Diese Vernachlässigung ist jedoch nicht statthaft für die Ionenstoßmomente. Man kann aber in vielen Fällen für die Ionen eine Maxwell-Verteilung annehmen, wobei die Temperatur durch die Energieübertragung Elektronen → Ionen bestimmt wird.

Herrn Professor A. Schlüter möchte ich an dieser Stelle für die Anregung zu dieser und den beiden folgenden Arbeiten und für viele wertvolle Diskussionen meinen Dank aussprechen.